

THERMODYNAMIQUE APPLIQUÉE

PCs

Corrigé

Un modèle simple d'ébullition en paroi

Corrigé

Lorsque l'on fait bouillir de l'eau dans une casserolle, au moment où l'ébullition se déclenche, on observe que des bulles apparaissent sur la paroi chauffée à des endroits bien précis appelés *sites de nucléation*. Si l'on continue de chauffer l'eau, on observe que le nombre de sites de nucléation augmente. La question que l'on se pose est de comprendre comment se déclenche l'ébullition et pourquoi le nombre de sites de nucléation augmente au fur et à mesure que l'on chauffe l'eau.

1 La tension interfaciale

1.1 La tension interfaciale d'un point de vue énergétique

Si l'on observe une bulle de savon ou une bulle de gaz dans un liquide, ces bulles ont toujours une forme proche d'une sphère ; en tout cas, elles sont toujours plus proches d'une sphère que d'un cube ou d'un tétraèdre ! En outre, on observe que les petites bulles sont toujours plus sphériques que les grosses qui sont plus facilement déformables.

Quelle explication énergétique peut être donnée pour expliquer ces observations ?

Correction

La sphère est la forme géométrique qui minimise la surface pour un volume donné. On peut considérer en première approximation que les bulles de savon ou de gaz dans un liquide sont isothermes. On observe que si la bulle est sphérique, elle n'évolue pas alors que si elle est déformée par rapport à la forme sphérique, elle évolue spontanément pour trouver sa forme d'équilibre sphérique. Or, tout système isotherme évolue spontanément vers son état d'équilibre caractérisé par un minimum d'énergie libre. Cela signifie donc que, d'un point de vue thermodynamique, la forme sphérique doit correspondre à un minimum d'énergie du système, ce système comprenant l'interface et les phases fluide qui l'entourent. Si l'on suppose en première approximation que les phases qui entourent l'interface ont une énergie qui reste constante (ce qui est le cas si, en première approximation, leur volume et leur température restent constants), leur énergie n'évolue pas. Si l'énergie évolue, pour être minimum à l'équilibre, c'est que l'interface doit être dotée d'une énergie.

Ainsi, si l'on postule que l'interface est dotée d'une énergie par unité de surface, alors cela explique pourquoi les bulles tendent à être sphériques : en minimisant l'aire de la surface de la bulle, le système minimise son énergie, cette minimisation étant caractéristique de l'équilibre thermodynamique.

On postule donc qu'il existe une énergie par unité de surface, appelée tension interfaciale, que l'on note σ .

Cela explique aussi pourquoi les bulles les plus petites sont moins déformables que les grosses. Si l'on déforme une surface, plus la longueur d'onde est petite, plus l'augmentation relative d'aire est grande. Or, pour les bulles les plus petites, les longueurs d'onde permettant de les déformer sont

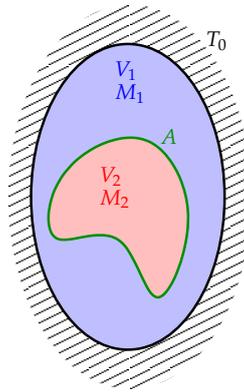
nécessairement faibles, ce qui engendre une augmentation relative d'aire plus grande que pour les grosses bulles dont la surface peut être déformée avec des longueurs d'onde plus grandes et engendrer donc une augmentation relative de l'aire plus faible.

1.2 La relation de Laplace

On s'intéresse ici aux conséquences thermodynamiques de l'existence d'une tension interfaciale.

1.2.1 Conditions d'équilibre isotherme

On considère le système thermodynamique diphasique schématisé sur la figure ci-dessous. Ce système est fermé et est maintenu isotherme à une température T_0 . Il est constitué de deux phases, de masse \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 et de volume V_1 et V_2 séparées par une interface d'aire A . On suppose qu'il n'y a pas de transfert de masse entre ces deux phases (de l'eau et de l'air par exemple).



Quelle est l'énergie libre totale du système ?

Correction

L'énergie est une grandeur extensive. Or, le système est constitué de 3 sous-systèmes : le liquide, le gaz et l'interface. L'énergie libre totale du système est donc la somme des énergies libres de ces 3 sous-systèmes :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_l + \mathcal{F}_g + \sigma A$$

où A représente l'aire de l'interface.

En tenant compte des différentes contraintes appliquées au système, déterminer les différentielles de l'énergie libre des phases liquide et gaz.

Correction

Chaque phase peut être caractérisée par sa température T , son volume V et sa masse M . On a donc

$$d\mathcal{F}_{l,g} = -S_{l,g} dT_{l,g} - P_{l,g} dV_{l,g} + g_{l,g} d\mathcal{M}_{l,g}$$

Or, le système est supposé être isotherme, si bien que $dT_g = dT_l = 0$ et il n'y a pas d'échange de masse entre les phases, si bien que $d\mathcal{M}_l = d\mathcal{M}_g = 0$. Enfin, le volume total du système ne varie pas :

$$V_g + V_l = cte$$

si bien que

$$dV_l = -dV_g$$

Par conséquent, on a

$$d\mathcal{F}_l = P_l dV_g$$

$$d\mathcal{F}_g = -P_g dV_g$$

Caractériser l'équilibre thermodynamique du système et en déduire une expression générale de la différence ($P_g - P_l$). On supposera que la tension interfaciale est une constante.

Correction

Le système étant isotherme, son équilibre thermodynamique est caractérisé par un minimum d'énergie libre. A l'équilibre, on a par conséquent

$$d\mathcal{F} = 0$$

En tenant compte de l'expression de \mathcal{F} et des différentielles des énergies libres des phases, on en déduit facilement

$$d\mathcal{F} = (P_l - P_g) dV_g + \sigma dA$$

L'équilibre est donc caractérisé par

$$P_g - P_l = \sigma \frac{dA}{dV_g}$$

On remarque que cette relation est la généralisation de la condition d'équilibre des pressions dans le cas où on néglige l'effet de la tension interfaciale : si $\sigma = 0$, $P_g = P_l$.

Pour simplifier l'analyse, on simplifie la géométrie du système en supposant qu'elle est sphérique. Le volume total est donc une sphère de rayon R_e . On suppose dans un premier temps que le gaz est situé au centre et que le liquide est situé à l'extérieur.

Déterminer la différence ($P_g - P_l$) en fonction de σ et du rayon R de la bulle de gaz. Cette relation est appelée relation de Laplace.

Correction

Dans le cas particulier considéré, on a

$$A = 4\pi R^2$$

$$V_g = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Par conséquent

$$\frac{dA}{dV_g} = \frac{2}{R}$$

et

$$P_g - P_l = \frac{2\sigma}{R}$$

Cette relation montre que la pression à l'intérieur de la bulle de gaz est supérieure à la pression dans le liquide environnant et que cette différence de pression est proportionnelle à la tension interfaciale et inversement proportionnelle au rayon.

Qu'en est-il dans le cas d'une goutte de liquide, c'est-à-dire lorsque le liquide se situe au centre et le gaz autour ?

Correction

Dans ce cas, on a

$$V_g = \frac{4}{3}\pi R_e^3 - \frac{4}{3}\pi R^3$$

et

$$\frac{dA}{dV_g} = -\frac{2}{R}$$

Par conséquent

$$P_l - P_g = \frac{2\sigma}{R}$$

Cette relation montre que, dans ce cas, c'est la pression dans le liquide qui est supérieure à la pression dans le gaz.

On peut donc généraliser la relation par

$$P_g - P_l = \frac{2\sigma}{R}$$

où $R > 0$ dans le cas d'une bulle de gaz et $R < 0$ dans le cas d'une goutte de liquide.

Cette relation est appelée **relation de Laplace** et constitue la conséquence principale de l'existence de la tension interfaciale.

1.2.2 Conditions d'équilibre générales

On généralise à présent le système en supposant que la température peut varier et que les phases peuvent échanger de la masse entre elles. On considère cependant que le système diphasique est fermé et isolé.

Déterminer les conditions d'équilibre du système.

Correction

Le système étant fermé, sa masse totale et son volume total sont constants :

$$M_l + M_v = cte$$

$$V_l + V_v = cte$$

Le système étant isolé, son énergie interne est constante :

$$U_l + U_v + \sigma A = cte$$

Enfin, l'entropie totale du système est donnée par

$$S = S_l + S_v$$

car on ne considère pas que la surface est dotée d'une entropie.

Or, le système étant fermé isolé, l'équilibre est caractérisé par un maximum d'entropie, ce qui signifie que, à l'équilibre, on a

$$dS = 0$$

On a

$$dU_{l,v} = T_{l,v} dS_{l,v} - P_{l,v} dV_{l,v} + g_{l,v} dM_{l,v}$$

En utilisant les relations ci-dessus, on montre facilement que l'équilibre est caractérisé par

$$(T_v - T_l) dS_v - (P_v - P_l) dV_v + (g_v - g_l) dM_v + \sigma dA = 0$$

Etant à l'équilibre, cette relation doit être vraie pour toute transformation infinitésimale. On peut par exemple considérer une transformation infinitésimale pour laquelle la géométrie des phases ne varie pas ($dV_v = 0$ et $dA = 0$) et la masse des phases ne varie pas ($dM_v = 0$) mais où l'entropie de la phase vapeur varie. On doit donc avoir, pour toute transformation de ce type et en particulier quel que soit le signe de dS_v

$$(T_v - T_l) dS_v = 0$$

Par conséquent, à l'équilibre, on a

$$T_v = T_l$$

On montre de même que

$$g_v = g_l$$

On a enfin

$$(P_v - P_l) dV_v = \sigma dA$$

Mais, en général, on ne peut pas considérer que les variations de volume et d'aire sont indépendantes, raison pour laquelle on a

$$P_v - P_l = \sigma \frac{dA}{dV_v}$$

Cette analyse montre que l'existence de la tension interfaciale n'a de conséquence que sur la condition d'égalité des pressions qui n'est plus vérifiée. En revanche, les deux autres conditions d'équilibre, à savoir l'égalité des températures et l'égalité des enthalpies libres massiques des phases, ne sont pas modifiées par l'existence de la tension interfaciale.

1.3 Lien avec les conditions de saturation

Supposons que la température du système est fixée à une valeur donnée T . On sait que, classiquement (c'est-à-dire lorsqu'on néglige l'effet de la tension interfaciale), à cette température, l'équilibre n'est possible que pour une valeur bien particulière de la pression : c'est la pression de saturation $P^{sat}(T)$. Or, la relation de Laplace nous indique que, du fait de l'existence de la tension interfaciale, les pressions des deux phases à l'équilibre P_v et P_l sont différentes lorsque l'interface est courbée. La question qui se pose donc est de déterminer le lien entre la pression de saturation P^{sat} et les pressions des phases à l'équilibre P_v et P_l . L'une des phases a-t-elle sa pression égale à la pression de saturation ? Si oui, laquelle ? Les pressions se répartissent-elles de part et d'autre de la pression de saturation ? Bref, quel est le lien entre les pressions P_v , P_l et P^{sat} ?

1.3.1 Pression de saturation et pression d'équilibre des phases

A la température T , on considère une transformation dans laquelle le rayon de courbure de l'interface passe de l'infini (interface plane) à une valeur finie R .

En supposant que l'effet de la tension interfaciale est petit sur la variation des pressions d'équilibre des phases par rapport à la saturation, donner une approximation au premier ordre de $(P_v - P^{sat})$ et de $(P_l - P^{sat})$.

Correction

Les pressions d'équilibre P_v et P_l sont solution du système d'équations suivant :

$$g_v(P_v, T) = g_l(P_l, T)$$

$$P_v - P_l = \frac{2\sigma}{R}$$

On note $dP_v = P_v - P^{sat}(T)$ et $dP_l = P_l - P^{sat}(T)$ et on suppose que $|dP_{l,v}| \ll 1$. Le système d'équations précédant devient donc

$$g_v(P^{sat}(T) + dP_v, T) = g_l(P^{sat}(T) + dP_l, T)$$

$$dP_v - dP_l = \frac{2\sigma}{R}$$

Or

$$dg = -s dT + v dP$$

où s est l'entropie massique et v est le volume massique.

En faisant un développement limité à l'ordre 1 de la première relation et en tenant compte du fait que la température est constante, on a

$$g_v(P^{sat}(T), T) + v_v^{sat} dP_v \simeq g_l(P^{sat}(T), T) + v_l^{sat} dP_l$$

où v^{sat} est le volume massique à saturation.

Or, à saturation, les enthalpies libres des deux phases sont égales

$$g_v(P^{sat}(T), T) = g_l(P^{sat}(T), T)$$

et on a donc

$$v_v^{sat} dP_v \simeq v_l^{sat} dP_l$$

Au premier ordre d'approximation, dP_v et dP_l sont donc solution du système suivant :

$$v_v^{sat} dP_v - v_l^{sat} dP_l \simeq 0$$

$$dP_v - dP_l = \frac{2\sigma}{R}$$

La solution de ce système est la suivante :

$$dP_v \simeq -\frac{v_l^{sat}}{v_v^{sat} - v_l^{sat}} \frac{2\sigma}{R}$$

$$dP_l \simeq -\frac{v_v^{sat}}{v_v^{sat} - v_l^{sat}} \frac{2\sigma}{R}$$

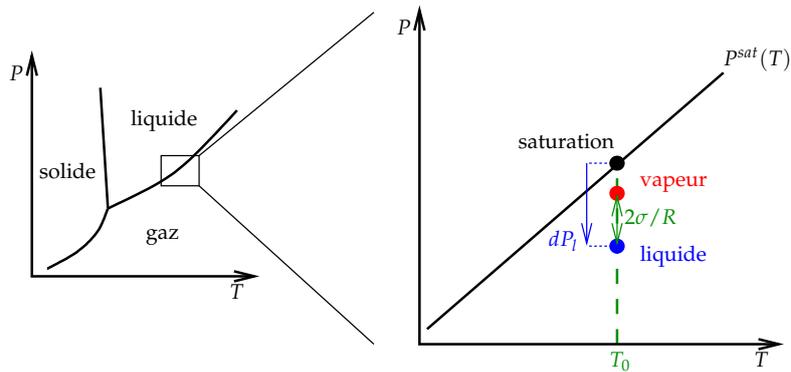
Ces relations montrent qu'aucune pression n'est égale à la pression de saturation. Elles montrent en outre que dP_v et dP_l ont le même signe et que ce signe dépend du signe du rayon de courbure. Ainsi, dans le cas d'une bulle ($R > 0$), les deux pressions sont inférieures à la pression de saturation et que, dans le cas d'une goutte ($R < 0$), les deux pressions sont supérieures à la pression de saturation.

Remarquons que ces relations sont totalement indépendantes de la forme des équations d'état des phases liquide et vapeur.

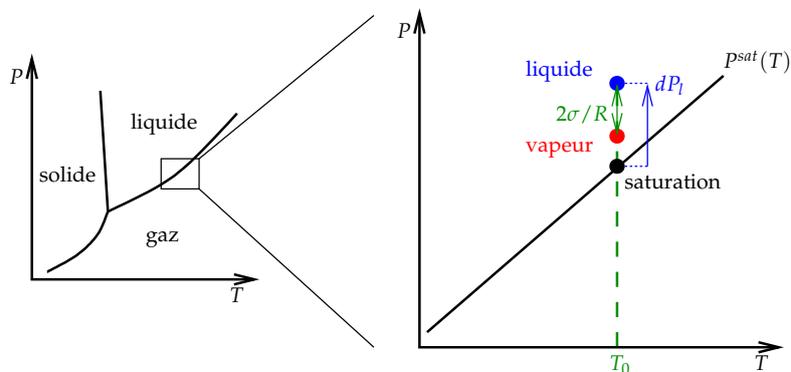
Dans un diagramme ($P; T$), représenter les points caractéristiques des phases liquide et vapeur dans le cas d'une bulle de vapeur de rayon R et dans le cas d'une goutte de liquide de rayon R . Quelle phase a ses caractéristiques les plus proches de la saturation ? Que dire de la stabilité thermodynamique des phases ?

Correction

Dans le cas d'une **bulle de vapeur** ($R > 0$), les pressions des deux phases sont *inférieures* à la pression de saturation et la pression de la phase vapeur est plus proche de la saturation ($v_v^{sat} > v_l^{sat}$ et $dP_v/dP_l = v_l^{sat}/v_v^{sat}$). Les points caractéristiques des phases sont donc ceux du graphique ci-dessous. Dans ce cas, la phase vapeur est stable alors que la phase liquide est métastable : sa pression est inférieure à la pression de saturation.



Dans le cas d'une **goutte de liquide** ($R < 0$), les pressions des deux phases sont *supérieures* à la pression de saturation et la pression de la phase vapeur reste plus proche de la saturation. Les points caractéristiques des phases sont représentés sur le graphique ci-dessous où l'on voit que, dans ce cas, la phase liquide est stable mais la phase vapeur est métastable.



1.3.2 Température d'équilibre d'une bulle de vapeur

Supposons à présent que l'on fixe la pression de la phase liquide P_0 . On cherche à déterminer la température à laquelle une bulle de vapeur de rayon R peut être à l'équilibre thermodynamique.

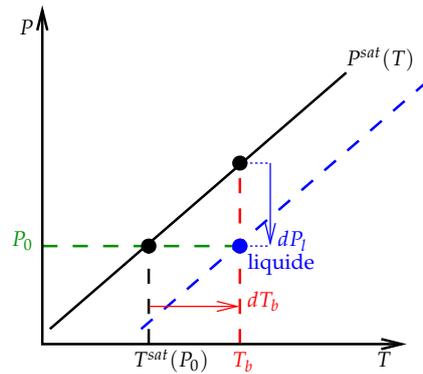
En s'aidant du diagramme (P, T) et en supposant que la température d'équilibre T_b est proche de la température de saturation, déterminer une approximation de cette température d'équilibre.

Correction

La pression du liquide est fixée à une valeur donnée P_0 . Du fait que le rayon de la bulle est non nul (et du fait de l'existence de la tension interfaciale), on sait que le liquide n'est pas à saturation mais qu'il est légèrement métastable : son point caractéristique ne se situe pas sur la courbe de saturation mais sur une courbe parallèle décalée verticalement de dP_l (les variations étant faibles, on suppose en première approximation que les volumes massiques à saturation ne dépendent pas de la température). La température T_b est donc celle pour laquelle le liquide est à l'équilibre à la pression P_0 . Cette condition s'écrit

$$P_0 = P_l^{eq}(T_b; R) \simeq P^{sat}(T_b) - \frac{v_v^{sat}}{v_v^{sat} - v_l^{sat}} \frac{2\sigma}{R}$$

Cette condition est représentée sur le graphe ci-dessous qui montre que **la température d'équilibre T_b est supérieure à la température de saturation $T^{sat}(P_0)$.**



On suppose que la température T_b est proche de la température de saturation à la pression P_0 et on a donc

$$T_b = T^{sat}(P_0) + dT_b$$

avec $|dT_b| \ll 1$. Si l'on fait un développement limité à l'ordre 1 en dT_b de la relation au-dessus, on obtient :

$$P_0 \simeq P^{sat}(T^{sat}(P_0)) + \frac{dP^{sat}}{dT} dT_b - \frac{v_v^{sat}}{v_v^{sat} - v_l^{sat}} \frac{2\sigma}{R}$$

Or

$$P^{sat}(T^{sat}(P_0)) = P_0$$

$$\frac{dP^{sat}}{dT} = \frac{\mathcal{L}}{T(v_v^{sat} - v_l^{sat})}$$

On obtient donc

$$dT_b \simeq \frac{T}{\rho_v^{sat} \mathcal{L}} \frac{2\sigma}{R}$$

soit

$$T_b \simeq T^{sat}(P_0) + \frac{T^{sat}(P_0)}{\rho_v^{sat} \mathcal{L}} \frac{2\sigma}{R}$$

Remarquons que cette relation est valable quelle que soit l'équation d'état des phases.

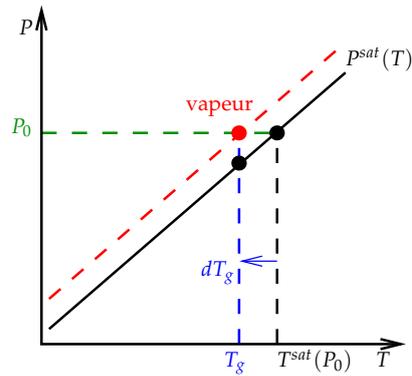
Cette relation confirme que la température d'équilibre est supérieure à la température de saturation. Cela signifie donc que, du fait de l'existence de la tension interfaciale, **pour qu'une bulle de vapeur existe, il est nécessaire que la température du système soit supérieure à la température de saturation à la pression fixée.**

1.3.3 Température d'équilibre d'une goutte de liquide

Si l'on suppose que la pression de la phase vapeur est fixée, on peut, par le même raisonnement, déterminer la température d'équilibre d'une goutte de liquide de rayon R . Cette détermination est laissée en guise d'exercice complémentaire.

Correction

En raisonnant de manière analogue au cas d'une bulle, le point représentatif de la vapeur (dont on fixe la pression) dans le diagramme (P, T) est figurée sur le graphe ci-dessous. Ce graphe montre en particulier que la température d'équilibre T_g est inférieure à la température de saturation.



La condition d'équilibre s'écrit

$$P_0 = P_v(T_g) \simeq P^{sat}(T_g) - \frac{v_l^{sat}}{v_v^{sat} - v_l^{sat}} \frac{2\sigma}{R}$$

En faisant un développement limité de cette relation à l'ordre 1 en $(T_g - T^{sat}(P_0))$, on trouve facilement

$$T_g \simeq T^{sat}(P_0) + \frac{T^{sat}(P_0)}{\rho_l^{sat} \mathcal{L}} \frac{2\sigma}{R}$$

Il faut se rappeler que, dans le cas d'une goutte, $R < 0$ et on trouve bien que la température d'équilibre est inférieure à la température de saturation. Cela signifie donc que, du fait de l'existence de la tension interfaciale, **pour qu'une goutte de liquide existe, il est nécessaire que la température du système soit inférieure à la température de saturation à la pression fixée.**

1.3.4 Quelques ordres de grandeur

A pression atmosphérique, on a

v_v^{sat}	1.694 m ³ /kg
v_l^{sat}	1.043 10 ⁻³ m ³ /kg
\mathcal{L}	2257 kJ/kg
σ	0.059 N/m

Déterminer la surchauffe nécessaire pour qu'une bulle de vapeur de 1 mm de rayon soit en équilibre thermodynamique. Idem pour une bulle de 1 μm de rayon.

Correction

On a

$$dT_b \simeq \frac{373.15 \times 1.694}{2257 \cdot 10^3} \times \frac{2 \times 0.059}{R} \simeq \frac{3.305 \cdot 10^{-5}}{R}$$

Pour une bulle de 1 mm de rayon, la surchauffe est donc d'environ $3.3 \cdot 10^{-2}$ K et pour une bulle de 1 μm de rayon, la surchauffe est d'environ 33 K.

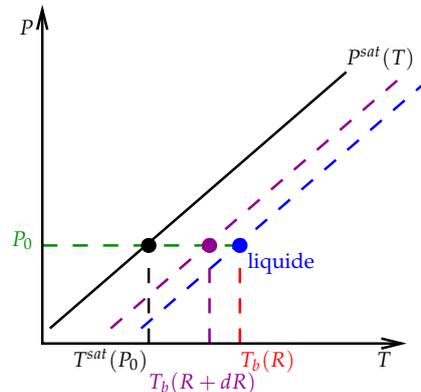
1.3.5 Stabilité de l'équilibre

D'un point de vue physique, l'état d'équilibre déterminé à pression extérieure fixée est-il stable ?

En d'autres termes, supposons qu'une bulle de vapeur de rayon R soit à l'équilibre à la pression extérieure P_0 et à la température d'équilibre T_b correspondante. Supposons que le rayon de la bulle devienne légèrement supérieur à R . Le rayon de la bulle aura-t-il tendance à diminuer ? On pourra s'aider du diagramme $(P; T)$ pour répondre.

Correction

A l'équilibre pour le rayon R , le système, et en particulier la phase liquide qui entoure la bulle, est à la température $T_b > T^{sat}(P_0)$. Si le rayon de la bulle augmente légèrement à la valeur $(R + dR)$, la nouvelle température d'équilibre sera inférieure à la température T_b . Cela signifie que la bulle de rayon $(R + dR)$ sera entourée de liquide à une température T_b supérieure à la température d'équilibre de la bulle. Le liquide aura donc tendance à se vaporiser, ce qui fera augmenter le rayon de la bulle de vapeur, ce qui augmentera encore le déséquilibre thermique. Le système est donc instable.

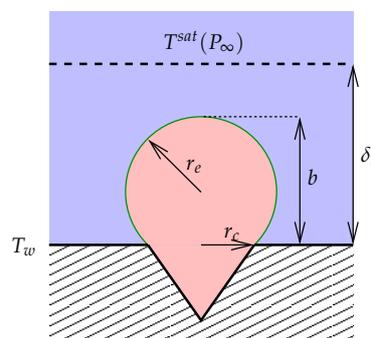


Si le rayon de la bulle diminue et passe de R à $(R - dR)$, la température d'équilibre de la bulle sera supérieure à la température du liquide environnant. Le liquide étant plus froid que la température d'équilibre, la vapeur aura tendance à se condenser, ce qui fera diminuer le rayon de la bulle, ce qui tendra à augmenter encore le déséquilibre.

Ainsi, lorsque la pression du liquide est imposée, **l'équilibre thermodynamique est instable.**

2 Un modèle simple d'ébullition pariétale

On considère une paroi chauffée sur laquelle une ébullition se développe. On suppose que la température de la paroi est maintenue à une température $T_w > T^{sat}(P_\infty)$. On considère pour simplifier que, à partir d'une distance δ_t de la paroi, la température est constante et égale à la température de saturation à la pression du liquide : $T(y = \delta_t) = T^{sat}(P_\infty)$.



Lorsqu'une bulle se détache de la paroi après avoir suffisamment grossi, son mouvement est tel que du liquide à saturation est ramené au contact de la paroi. Ce liquide va se réchauffer au contact de la paroi. Pour simplifier, on suppose que la couche de liquide se réchauffe uniquement par conduction. L'équation d'évolution spatio-temporelle de la température sur l'épaisseur de liquide $[0; \delta_t]$ est la suivante (cf. cours de transferts thermiques)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha_l \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

où α_l est un paramètre physique appelé diffusivité thermique et où

$$\theta(y; t) = T(y; t) - T^{sat}$$

où T est la température du liquide.

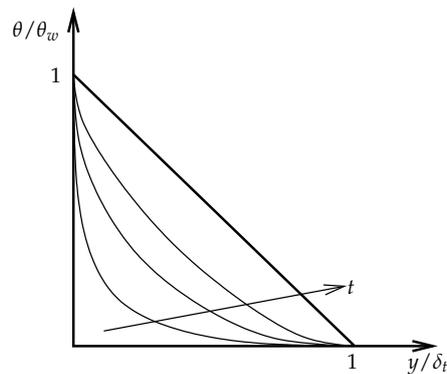
Les conditions initiale et aux limites de cette équation sont les suivantes :

$$\begin{cases} \theta(y; t = 0) = 0 & \text{la couche de fluide est initialement à saturation} \\ \theta(y = 0; t) = \theta_w & \text{la température de la paroi est imposée} \\ \theta(y = \delta_t; t) = 0 & \text{le liquide est toujours à saturation en } y = \delta_t \end{cases}$$

On peut montrer (cf. cours de transferts thermiques) que la solution de cette équation est la suivante :

$$\frac{\theta(y, t)}{\theta_w} = \frac{\delta_t - y}{\delta_t} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n} \sin \left[n\pi \left(\frac{\delta_t - y}{\delta_t} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 (\alpha_l t / \delta_t^2)}$$

Cette solution est représentée schématiquement sur la figure ci-dessous. Cette figure montre que tous les points de la couche de liquide se réchauffent avec le temps et que, au bout d'un temps infini, le profil de température en y est linéaire.



On suppose que des bulles peuvent se créer en paroi et que ces bulles se créent préférentiellement sur des cavités de la paroi tel que représenté sur le schéma au-dessus. On suppose que les cavités sont coniques et que les bulles sont sphériques. On note b la hauteur de la bulle, r_e son rayon et on note r_c le rayon de la bouche de la cavité. Pour simplifier, on suppose que

$$b = 2r_c$$

ce qui implique que

$$b = 1.6r_e$$

Dans le modèle considéré, on suppose qu'une cavité devient active, c'est-à-dire que l'ébullition peut se développer sur cette cavité, si, à un instant donné, le liquide tout autour de la bulle a une température supérieure à la température d'équilibre thermodynamique de la bulle. Ainsi, du fait de ce déséquilibre thermodynamique, la bulle pourra grossir et ainsi se détacher de la paroi.

2.1 Condition d'équilibre thermodynamique au sommet de la bulle

Déterminer cette condition d'équilibre thermodynamique en exprimant la température au sommet de la bulle sous la forme de la fonction $(\theta_b / \theta_w)(b / \delta_t)$.

Correction

On a montré que la température d'équilibre d'une bulle de rayon R est

$$T_{eq} = T^{sat} + \frac{T^{sat}}{\rho_v^{sat} \mathcal{L}} \frac{2\sigma}{R}$$

Ici, le rayon de la bulle est $r_e = b/1.6$. Par conséquent, la condition d'équilibre thermodynamique du sommet de la bulle s'écrit

$$T_b = T^{sat} + \frac{T^{sat}}{\rho_v^{sat} \mathcal{L}} \frac{3.2\sigma}{b}$$

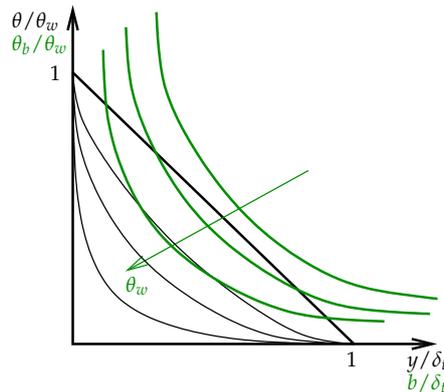
soit

$$\frac{\theta_b}{\theta_w} = \frac{3.2\sigma T^{sat}}{\rho_v^{sat} \mathcal{L} (b/\delta_t) \delta_t \theta_w}$$

Tracer l'allure de la fonction $(\theta_b/\theta_w)(b/\delta_t)$ pour plusieurs valeurs de la température de paroi θ_w .

Correction

La fonction $(\theta_b/\theta_w)(b/\delta_t)$ est une hyperbole et cette hyperbole est une fonction décroissante de θ_w . Le faisceau de courbes paramétré par θ_w est schématisé sur la figure ci-dessous.



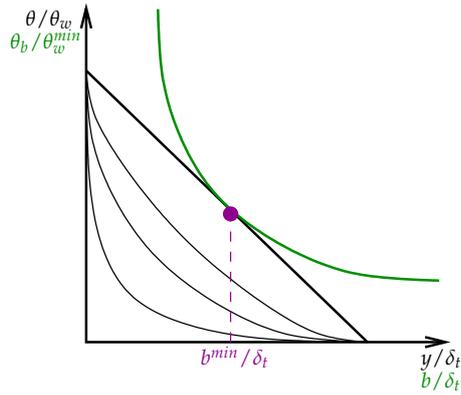
2.2 Critère de déclenchement de l'ébullition

En déduire qu'il existe une température minimale de paroi θ_w^{min} en deça de laquelle aucune cavité n'est active et déterminer sa valeur.

Correction

Lorsque θ_w est trop faible, on a $\theta_b > \theta, \forall (t; y; b)$, ce qui signifie que quelle que soit la taille de la bulle considérée, c'est-à-dire $\forall b$, la température du fluide θ sera toujours inférieure à la température d'équilibre thermodynamique au sommet de la bulle θ_b , si bien que toute la bulle ne sera pas entourée de liquide surchauffé et la bulle ne pourra pas croître suffisamment pour que le site soit actif (le sommet de la bulle sera le siège de condensation et non pas de vaporisation). Ainsi, si la température de paroi est trop faible, aucun site n'est actif. On n'observera donc pas de changement de phase alors que la température de paroi est supérieure à la température de saturation : $\theta_w = T_w - T^{sat} > 0$. Ceci est dû à l'existence de la tension interfaciale.

Le premier site sera actif lorsque la courbe $(\theta_b/\theta_w)(b/\delta_t)$ est tangente à la courbe $(\theta/\theta_w) = 1 - (y/\delta_t)$.



La fonction $(\theta_b/\theta_w)(b/\delta_t)$ est de la forme

$$y(x) = \frac{A}{\theta_w x}$$

avec

$$A = \frac{3.2 \sigma T^{sat}}{\rho_v^{sat} \mathcal{L} \delta_t}$$

La tangente à la courbe $y(x)$ au point x_0 est

$$y = \frac{A}{\theta_w x_0} - \frac{A}{\theta_w x_0^2} (x - x_0)$$

Par identification avec la droite $1 - x$, on obtient le système :

$$\frac{A}{\theta_w x_0^2} = 1$$

$$\frac{2A}{\theta_w x_0} = 1$$

dont la solution est

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

$$\theta_w = 4A$$

En remplaçant A par sa valeur, on a donc

$$\theta_w^{min} = \frac{12.8 \sigma T^{sat}}{\rho_v^{sat} \mathcal{L} \delta_t}$$

$$(b^{min}/\delta_t) = \frac{1}{2}$$

soit

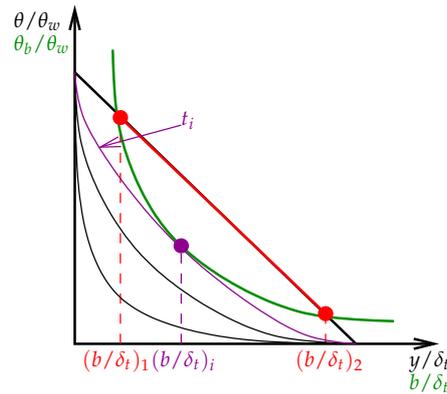
$$r_c^{min} = \frac{\delta_t}{4}$$

où r_c^{min} est la taille des premières cavités qui deviennent actives.

2.3 Augmentation du nombre de cavités actives

Montrer graphiquement que pour une température pariétale θ_w supérieure à θ_w^{min} , il existe un intervalle de tailles de cavités actives.

Correction



Pour $\theta_w > \theta_w^{min}$, la courbe $(\theta_b/\theta_w)(b/\delta_t)$ a la forme donnée sur la figure ci-dessus. Toutes les cavités dont la taille est située entre $(b/\delta_t)_1$ et $(b/\delta_t)_2$ sont actives. Par exemple, les cavités caractérisées par une taille $(b/\delta_t)_i$ devient active au temps t_i : au-delà de t_i l'ensemble du liquide entourant la bulle a une température supérieure à la température d'équilibre thermodynamique de la bulle et la bulle peut donc grossir.

Pourquoi les cavités les plus petites ne sont-elles pas actives ?

Correction

Les cavités les plus petites ne sont pas actives car les bulles qui y sont attachées sont très petites et, du fait de la tension interfaciale, la température d'équilibre thermodynamique est plus grande que la température du liquide ; elles ne sont donc pas suffisamment en déséquilibre pour croître.

Dans le cadre de ce modèle, les cavités les plus grandes ne sont pas actives non plus car la température d'équilibre thermodynamique au sommet de la bulle est supérieure à la température du liquide qui aura donc tendance à se condenser. De l'évaporation a lieu en bas de la bulle mais de la condensation se produit au sommet de la bulle, si bien que le transfert de masse global ne permet pas nécessairement à la bulle de grossir.

Etude du cycle d'un turbo-réacteur

Corrigé

Les moteurs à turbine à gaz sont largement utilisés pour la propulsion des avions car ils sont légers et compacts. Les turbines à gaz des avions fonctionnent sur le principe d'un cycle *ouvert* schématisé sur la figure 1.

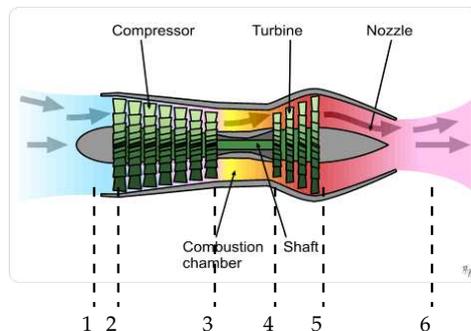


FIGURE 1 – Schéma de principe de fonctionnement d'un turbo-réacteur

Le gaz entre dans le réacteur et passe dans un diffuseur pour diminuer la vitesse en entrée du compresseur. Le gaz est comprimé par le compresseur et entre dans la chambre de combustion où il est chauffé. Le gaz est alors partiellement détendu dans la turbine qui fournit la puissance nécessaire au compresseur. En sortie de turbine, le gaz reste à une pression relativement élevée par rapport à la pression extérieure et il est détendu dans une tuyère, ce qui permet d'accélérer le gaz, cette accélération servant à propulser l'avion.

On admet que, moyennant quelques approximations, un bilan de quantité de mouvement permet de montrer que la force appliquée par le moteur à l'air est la suivante :

$$F = \dot{m} (V_s - V_e)$$

où \dot{m} est le débit d'air dans le moteur et V_s et V_e sont les vitesses du gaz respectivement de sortie et d'entrée dans le moteur.

Par application du principe de l'action et de la réaction, la force appliquée par l'air sur le moteur, et donc l'avion, est l'opposée de la force ci-dessus. En régime de croisière (*i.e.* lorsque la vitesse de l'avion est constante), cette force sert à contre-balancer la force de frottement que l'air applique sur l'avion.

Soit V_a la vitesse de l'avion dans l'air supposé être au repos. La puissance développée par la force de propulsion est donnée par

$$\dot{q}_p = F \cdot V_a$$

Soit un avion volant à une vitesse de 260 m/s à une altitude où l'air est à une pression de 34.5 kPa et une température de -40°C . Le compresseur a un rapport de pression de 10 et la température des

gaz à l'entrée de la turbine est de 1093°C . L'air entre dans le compresseur à un débit massique de 45 kg/s .

Le but de ce problème est de déterminer l'efficacité du moteur. Pour cela, on supposera que le gaz a le comportement d'un gaz parfait à C_p et C_v constants et on prendra $C_p = 1.1\text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$, $r = 0.287\text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ et $\gamma = 1.353$.

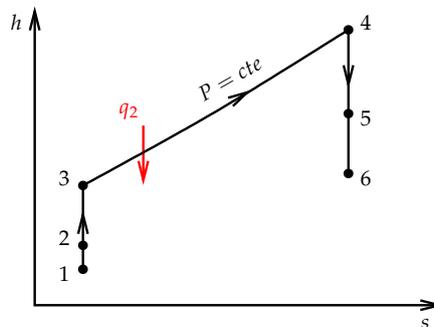
1 Cycle du gaz

Bien que les compositions du gaz à l'entrée et la sortie de la chambre de combustion soient différentes, pour simplifier la modélisation, on suppose que la chambre de combustion sert uniquement à réchauffer l'air et que les propriétés de l'air (par ex. sa masse molaire) ne sont pas modifiées par ce changement de composition. En outre, on suppose que la pression dans la chambre de combustion est uniforme. On suppose enfin que toutes les compressions et détente sont adiabatiques et réversibles.

Dans ces conditions, représenter les différents états du gaz à la traversée du réacteur sur un diagramme de Mollier.

Correction

Le cycle thermodynamique idéal d'un tel moteur est représenté sur la figure suivante.



Les compressions et détente étant adiabatiques et réversibles, elles sont isentropiques. L'enthalpie étant une fonction croissante de la pression, h augmente lors d'une compression et diminue lors d'une détente. La chaleur est supposée être fournie à pression constante qui est une exponentielle pour un gaz parfait à C_p constant.

La compression dans le diffuseur et la détente dans la tuyère sont sans apport de chaleur et de travail.

2 Etat du gaz à l'entrée du compresseur

Pour simplifier, on considère que le diffuseur présent en amont du compresseur est idéal, dans le sens où la vitesse du gaz en entrée du compresseur est si faible que l'énergie cinétique du gaz peut y être négligée devant les autres contributions énergétiques.

En négligeant le travail et la chaleur fournie au gaz dans le diffuseur, déterminer la différence d'enthalpie massique du gaz entre l'entrée et la sortie du diffuseur.

En déduire la température T_2 à l'entrée du compresseur.

Déterminer la pression P_2 à l'entrée du compresseur.

Correction

On considère comme système le gaz entre l'entrée et la sortie du diffuseur. Le bilan d'énergie appliqué à ce système s'écrit :

$$\frac{\partial (\mathcal{U} + \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p)}{\partial t} = \sum_{e-s} \dot{m} (h + e_c + e_p) + \dot{Q} + \dot{W}'$$

où \mathcal{U} , \mathcal{E}_c et \mathcal{E}_p sont les énergies interne, cinétique et potentielle du système, h , e_c et e_p sont les enthalpies, énergies cinétique et potentielle massiques, \dot{m} est le flux de masse, \dot{Q} et \dot{W}' sont les puissances calorifique et mécanique fournies au système.

L'écoulement étant supposé être stationnaire, le membre de gauche est nul et \dot{m} est constant entre l'entrée et la sortie. Enfin, il n'y a pas de variation d'énergie potentielle. On a donc :

$$\dot{m} [h + e_c]_e = \dot{Q} + \dot{W}'$$

Cette relation est vraie pour tous les composants du turbo-réacteur.

Si on l'applique au cas du diffuseur, on obtient :

$$\dot{m} \left[h_2 - \left(h_1 + \frac{V_a^2}{2} \right) \right] = 0$$

soit

$$h_2 - h_1 = \frac{V_a^2}{2}$$

Le gaz étant supposé avoir un comportement de gaz parfait à C_p constant, on a

$$h_2 - h_1 = C_p (T_2 - T_1)$$

On a donc :

$$T_2 = T_1 + \frac{V_a^2}{2C_p}$$

L'application numérique donne :

$$T_2 = 263.88 \text{ K}$$

La transformation du fluide à la traversée du diffuseur est adiabatique réversible et le fluide ayant un comportement de gaz parfait à γ constant, on peut appliquer la formule

$$P^{1-\gamma} T^\gamma = cste$$

On en déduit donc

$$P_2 = P_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

L'application numérique donne :

$$P_2 = 55.44 \text{ kPa}$$

3 Etat à la sortie du compresseur

Déterminer la pression P_3 en sortie de compresseur.
En déduire la température T_3 .

Correction

Le compresseur est supposé avoir un rapport de compression de 10, ce qui signifie que

$$P_3 = 10 P_2 = 554.4 \text{ kPa}$$

La compression étant supposée être adiabatique réversible et le gaz étant supposé avoir un comportement de gaz parfait à γ constant, on peut appliquer la formule

$$T_3 = T_2 \left(\frac{P_3}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

L'application numérique donne :

$$T_3 = 481.27 \text{ K}$$

4 Travail de compression et de détente

Déterminer le travail du compresseur et en déduire l'état du gaz à la sortie de la turbine.

Correction

L'application du bilan d'énergie au gaz à travers le compresseur donne :

$$\dot{m} C_p (T_3 - T_2) = \dot{W}'_c = 10.761 \text{ MW}$$

Cette puissance est fournie par la turbine. On a donc

$$\dot{W}'_c = -\dot{W}'_t$$

où \dot{W}'_t est la puissance fournie par la turbine au gaz ; elle est donc bien négative.

L'application du bilan d'énergie au gaz à travers la turbine donne :

$$\dot{m} C_p (T_5 - T_4) = \dot{W}'_t = -\dot{W}'_c = \dot{m} C_p (T_2 - T_3)$$

soit

$$T_5 = T_4 + T_2 - T_3$$

L'application numérique donne :

$$T_5 = 1148.76 \text{ K}$$

On a également

$$P_5 = P_4 \left(\frac{T_5}{T_4} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

L'application numérique donne :

$$P_5 = 285.38 \text{ kPa}$$

5 Energie de combustion

Déterminer l'énergie fournie sous forme de chaleur dans la chambre de combustion.

Correction

L'application du bilan d'énergie au gaz à travers la chambre de combustion donne :

$$\dot{m} C_p (T_4 - T_3) = \dot{Q}$$

On obtient :

$$\dot{Q} = 43.8 \text{ MW}$$

6 Etat à la sortie de la tuyère

Exprimer la température à la sortie de la tuyère en fonction de P_5 , T_5 et P_6 . Donner sa valeur.

En négligeant l'énergie cinétique du gaz à la sortie de la turbine par rapport aux autres contributions énergétiques ainsi que le travail des forces extérieures et la chaleur fournie au gaz, déterminer la vitesse de sortie du gaz V_6 .

Correction

Dans la tuyère, on a :

$$T_6 = T_5 \left(\frac{P_6}{P_5} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 661.83 \text{ K}$$

Le bilan d'énergie appliqué au gaz à travers la tuyère donne :

$$Cp(T_6 - T_5) + \frac{V_6^2}{2} = 0$$

soit

$$V_6 = \sqrt{2 Cp (T_5 - T_6)} = 1035 \text{ m/s}$$

7 Récapitulatif

Récapituler les résultats sous la forme de tableaux donnant l'état du fluide aux différents points caractéristiques de son évolution et les puissances mécaniques et thermiques mises en jeu.

Correction

Les conditions thermodynamiques du gaz aux différents points caractéristiques de son évolution sont récapitulées dans le tableau suivant :

	P (kPa)	T (K)	V (m/s)
①	34.5	233.15	260
②	55.44	263.88	0
③	554.4	481.27	0
④	554.4	1366.15	0
⑤	285.38	1148.76	0
⑥	34.5	661.83	1035

Les différentes puissances mécaniques et thermiques mises en jeu au cours de la transformation du fluide sont récapitulées dans le tableau suivant :

	\dot{Q} (kW)	\dot{W} (kW)
Diffuseur	0	0
Compresseur	0	10761
Combustion	43800	0
Turbine	0	-10761
Tuyère	0	0

8 Puissance de propulsion et rendement du turbo-réacteur

Déterminer la puissance \dot{q}_p développée par la force de propulsion.
En déduire le rendement du turbo-réacteur.

Correction

On a :

$$\dot{q}_p = F \cdot V_a = \dot{m} (V_s - V_e) \cdot V_a$$

avec $V_e = V_a$.

On obtient :

$$\dot{q}_p = 9.068 \text{ MW}$$

Le rendement est le rapport entre la puissance produite et la puissance consommée. Ici, la puissance produite est celle qui sert à propulser l'avion, soit \dot{q}_p et la puissance consommée est celle qui sert à chauffer le gaz dans la chambre de combustion, soit \dot{Q} . On en déduit :

$$\eta = \frac{\dot{q}_p}{\dot{Q}} = 21\%$$

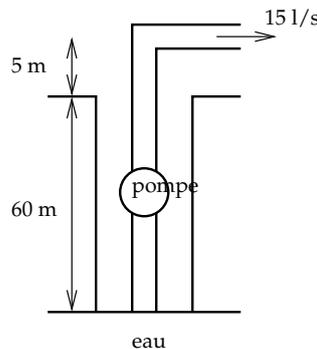
PC N°2

Dimensionnement d'une pompe de relevage

Corrigé

Soit une source souterraine dont la surface libre se situe à 60 m sous le niveau du sol. L'eau doit être élevée à 5 m au-dessus du sol par une pompe. Le diamètre du tuyau est 10 cm à l'entrée et 15 cm à la sortie.

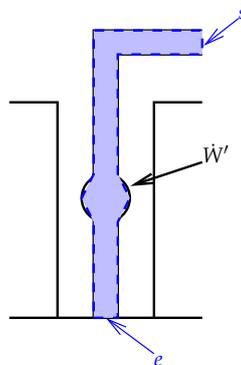
La masse volumique de l'eau est de 1000 kg/m^3 et l'eau est supposée être incompressible à la pression atmosphérique.



En négligeant les échanges de chaleur avec l'extérieur et dus aux frottements dans la canalisation, déterminer la puissance à fournir à la pompe pour obtenir un écoulement stationnaire à un débit de 15 l/s.

Correction

On considère comme système l'eau comprise entre l'entrée et la sortie du tuyau tel que représenté sur la figure ci-dessous.



Ce système est un système ouvert. Le bilan d'énergie pour ce système s'écrit :

$$\frac{\partial (U + \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p)}{\partial t} = \sum_{e-s} \dot{m} (h + e_c + e_p) + \dot{W}' + \dot{Q}$$

où \mathcal{U} , \mathcal{E}_c et \mathcal{E}_p sont les énergies respectivement interne, cinétique et potentielle du système, où h , e_c et e_p sont respectivement l'enthalpie, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle par unité de masse, où \dot{W}' et \dot{Q} sont les puissances respectivement mécanique et calorifique fournies au système et où \dot{m} sont les débits de masse.

Par ailleurs, le bilan de masse s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} = \sum_{e-s} \dot{m}$$

où \mathcal{M} est la masse du système.

L'écoulement étant stationnaire, les membres de gauche des deux équations sont nuls. Par ailleurs, le système ne comprenant qu'une entrée et qu'une sortie, le bilan de masse donne :

$$\dot{m}_s + \dot{m}_e = 0$$

On note simplement \dot{m} le flux de masse sortant (qui est positif).

Les échanges de chaleur étant négligés, l'équation de bilan d'énergie devient :

$$\dot{m} [h + e_c + e_p]_e^s = \dot{W}'$$

Pour déterminer les énergies cinétiques à l'entrée et à la sortie, il est nécessaire de connaître la vitesse de l'eau à ces endroits. Pour les calculer, on utilise la définition du flux de masse :

$$\dot{m} = - \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

où A est la surface considérée (ici d'entrée ou de sortie), ρ est la masse volumique locale du fluide sur cette surface, \mathbf{v} est la vitesse locale du fluide et \mathbf{n} est la normale unitaire de la surface dirigée vers l'extérieur du système. Si l'on prend comme surface une section droite de canalisation et si on suppose que la vitesse est uniforme sur la surface et colinéaire à la normale, on a :

$$\dot{m} = \rho v_e A_e = \rho v_s A_s$$

où v est la norme de la vitesse et A est l'aire de la surface.

On a donc

$$v_e = \frac{\dot{m}}{\rho A_e} = \frac{15 \times 1}{1000 \times \pi \times (0.1)^2 / 4} = 1.9 \text{ m/s}$$

$$v_s = \frac{\dot{m}}{\rho A_s} = \frac{15 \times 1}{1000 \times \pi \times (0.15)^2 / 4} = 0.85 \text{ m/s}$$

La variation d'énergie cinétique massique est donc

$$[e_c]_e^s = \frac{v_s^2}{2} - \frac{v_e^2}{2} = -1.46 \text{ J/kg}$$

La différence d'énergie potentielle massique est donnée par

$$[e_p]_e^s = g(z_s - z_e) = 9.81 \times 65 = 638 \text{ J/kg}$$

Il reste à déterminer la variation d'enthalpie. Pour cela, il est nécessaire de connaître l'état thermodynamique du fluide à l'entrée et à la sortie de la canalisation. Tout d'abord, on peut considérer qu'il n'y a pas de variation de température entre l'entrée et la sortie. Par ailleurs, à l'entrée et à la

sortie de la canalisation, l'eau est en contact avec l'air environnant et il y a équilibre des pressions de l'eau et de l'air. L'air étant globalement en équilibre, la pression de l'air est la pression hydrostatique :

$$P_s - P_e = -\rho_{air} g (z_s - z_e)$$

Or, la masse volumique de l'air est beaucoup plus faible que celle de l'eau et on peut donc négliger les variations de la pression de l'air.

Par conséquent, la température et la pression de l'eau en entrée et en sortie de canalisation sont égales (en première approximation). Or, l'enthalpie étant une fonction d'état, sa valeur ne dépend que de l'état de l'eau, cet état étant le même à l'entrée et à la sortie de la canalisation. On a donc :

$$[h]_e^s \simeq 0$$

On a donc

$$\dot{W}' = \dot{m} [h + e_c + e_p]_e^s \simeq 15 \times (638 - 1.46) = 5.54 \text{ kW}$$

Discuter les différentes contributions de cette puissance.

Correction

On remarque que la variation d'énergie cinétique est beaucoup plus faible que la variation d'énergie potentielle. L'essentiel de la puissance de la pompe est donc liée à la variation d'énergie potentielle. Il est en effet clair que si l'on devait faire le travail à la place de la pompe, ce qui nous fatiguerait le plus serait le fait de monter l'eau et pas de lui donner de la vitesse !

Cet exemple montre que, suivant les applications, il est important de négliger ou non certaines parties de l'énergie totale. Dans cet exemple, il est essentiel de prendre en compte la variation d'énergie potentielle alors que dans d'autres applications, elle peut être négligée alors que la variation d'énergie cinétique doit impérativement être prise en compte.

Revenons à présent sur l'hypothèse de faible variation de la pression atmosphérique. On a

$$P_s - P_e = -\rho_{air} g (z_s - z_e) \simeq -1 \times 9.81 \times 65 = -638 \text{ Pa}$$

Or

$$\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{\rho} + \frac{T}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P < \frac{1}{\rho}$$

Par conséquent :

$$h_s - h_e \simeq \left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T (P_s - P_e) < \frac{P_s - P_e}{\rho} = \frac{-638}{1000} = -0.638 \text{ J}$$

On vérifie bien que cette variation est 1000 fois plus faible que celle liée à la variation d'énergie potentielle du liquide et qu'elle peut effectivement être négligée.

Notons enfin que l'on a négligé les variations de pression dues au frottement de l'eau sur les parois de la canalisation. Or, cette variation de pression n'est pas nécessairement négligeable, raison pour laquelle il est nécessaire de prévoir une puissance de pompage légèrement supérieure à celle déterminée ici.

Etude d'un cycle pour une chambre froide

Corrigé

1 Questions préliminaires

1.1 Compressions adiabatiques réversible et irréversible

Considérons un état initial du gaz, noté ①, caractérisé par une pression P_0 et une entropie s_1 . On suppose que ce gaz est comprimé de manière adiabatique pour l'amener à une pression P_1 . On note ② l'état du fluide si la compression est réversible et ②' son état si la compression est irréversible.

Représenter graphiquement les états ①, ② et ②' sur un diagramme de Mollier et justifier.

Correction

Les isobares P_0 et P_1 sont représentées sur la figure ci-dessous. Pour un gaz parfait à C_p constant, ce sont des portions d'exponentielles. Une transformation adiabatique réversible est isentropique. L'entropie du gaz dans l'état ② est donc celle du gaz dans l'état ①. D'où le point représentatif de l'état ② de la figure suivante.

Par application du second principe de la thermodynamique, l'entropie d'un système ne peut que croître lors d'une transformation adiabatique irréversible. Par conséquent, l'entropie du gaz dans l'état ②' est supérieure à celle du gaz dans l'état ①. La pression des deux états ② et ②' étant identique, on en déduit le point représentatif de l'état ②' sur la figure suivante.

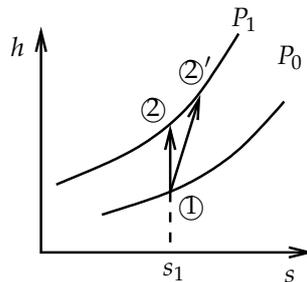


FIGURE 1 – Compressions réversible et irréversible.

1.2 Puissance de compression

Entre les deux transformations réversibles et irréversibles, quelle est celle pour laquelle la puissance nécessaire pour comprimer le fluide de la pression P_0 à la pression P_1 est la plus grande? On pourra s'aider de la représentation graphique pour justifier la réponse.

Correction

On applique le premier principe de la thermodynamique au système ouvert composé du gaz traversant le compresseur. Si l'on néglige les variations d'énergies cinétique et potentielle et pour un écoulement stationnaire, on a :

$$\dot{m} (h_2 - h_1) = \dot{W}_c$$

où \dot{m} est le flux de masse traversant le compresseur et \dot{W}_c est la puissance fournie par le compresseur au fluide.

Pour la transformation irréversible, on a :

$$\dot{m} (h_{2'} - h_1) = \dot{W}'_c$$

En soustrayant ces deux relations, on obtient :

$$\dot{m} (h_{2'} - h_2) = \dot{W}'_c - \dot{W}_c$$

Or le graphe montre que $(h_{2'} - h_2) > 0$, ce qui signifie que $(\dot{W}'_c - \dot{W}_c) > 0$ (car $\dot{m} > 0$). Or, pour un compresseur, $\dot{W}_c > 0$. Par conséquent, la puissance nécessaire est plus grande lorsque la transformation est irréversible.

1.3 Puissance de détente

On considère un autre état du gaz, noté ③, caractérisé par une pression P_1 et une entropie $s_3 > s_1$. On suppose que ce gaz est détendu dans une turbine adiabatique pour l'amener à la pression P_0 . On note ④ l'état du fluide si la détente est réversible et ④' son état si la détente est irréversible.

En suivant un raisonnement identique à celui de la compression, pour quelle transformation la puissance récupérée à la turbine est-elle la plus grande ?

Correction

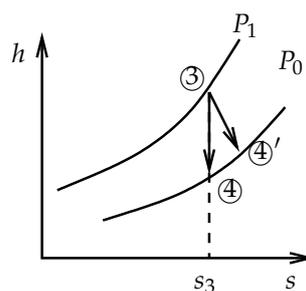


FIGURE 2 – Détentes réversible et irréversible.

En suivant le même raisonnement que pour la compression, on a :

$$\dot{m} (h_{4'} - h_4) = \dot{W}'_d - \dot{W}_d$$

soit

$$-\dot{W}'_d = -\dot{W}_d - \dot{m} (h_{4'} - h_4)$$

Or le graphe montre que $(h_{4'} - h_4) > 0$, ce qui signifie que $-\dot{W}'_d < -\dot{W}_d$ (car $\dot{m} > 0$). Or, pour une turbine, $\dot{W}_d < 0$. Par conséquent, en valeur absolue, la puissance récupérée à la turbine (à savoir $-\dot{W}_d$) est plus faible lorsque la transformation est irréversible.

1.4 Rendement isentropique

Pour une transformation amenant le gaz d'une pression P_1 à une pression P_2 , on définit le rendement isentropique η^{is} de la manière suivante :

$$\begin{cases} \eta_c^{is} = \frac{h_2^{is} - h_1}{h_2 - h_1} & \text{pour une compression adiabatique} \\ \eta_d^{is} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_2^{is}} & \text{pour une détente adiabatique} \end{cases}$$

où h_2^{is} désigne l'enthalpie correspondant à la transformation réversible et h_2 celle correspondant à la transformation irréversible.

Justifier que η_c^{is} et η_d^{is} sont inférieurs à 1.

Correction

Pour une compression adiabatique, on a montré que :

$$\frac{h_2^{is} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{\dot{W}_c}{\dot{W}'_c} < 1$$

Le rendement η_c^{is} est donc bien inférieur à 1.

Pour une détente adiabatique, on a montré que :

$$\frac{h_2^{is} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{\dot{W}_d}{\dot{W}'_d}$$

Or, $\dot{W}'_d > \dot{W}_d$ et $\dot{W}'_d < 0$, si bien que $(\dot{W}_d / \dot{W}'_d) > 1$. On a donc

$$\eta_d^{is} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_2^{is}} < 1$$

2 Refroidissement d'une chambre froide

On étudie une installation permettant de refroidir une chambre froide. Pour cela, on utilise le cycle thermodynamique schématisé sur la figure ci-dessous. Le fluide circulant dans l'installation est un gaz que l'on supposera se comporter comme un gaz parfait dont les capacités calorifiques à pression constante et à volume constant sont supposées être constantes. On suppose que la turbine et le compresseur sont adiabatiques et que leur rendement isentropique est de 96%. On suppose en outre que toutes les canalisations sont isolées thermiquement, que les pertes de charges dans les canalisations sont négligeables ainsi que les variations d'énergies potentielle et cinétique. On suppose enfin que l'installation fonctionne de manière stationnaire.

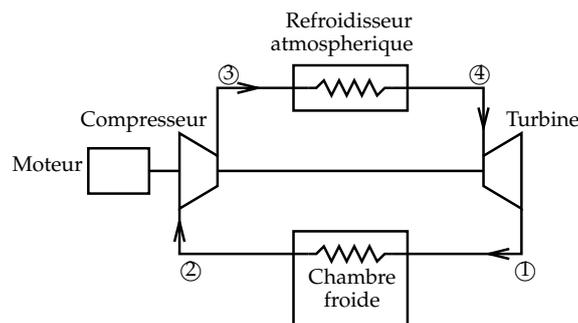


FIGURE 3 – Schématisation de l'installation.

Les données thermodynamiques du gaz considéré sont les suivantes :

C_p	1,04 kJ/(kg.K)
γ	1,4
r	0.297 kJ/(kg.K)

Les données connues sont les suivantes :

$P_1 = 1 \text{ bar}$	
$P_2 = 1 \text{ bar}$	$T_2 = 265 \text{ K}$
$P_3 = 3 \text{ bar}$	
$P_4 = 3 \text{ bar}$	$T_4 = 305 \text{ K}$

On cherche à déterminer la puissance \dot{W}_m à apporter à la turbine par l'intermédiaire d'un moteur auxiliaire (cf. schéma) ainsi que l'efficacité thermodynamique de ce cycle.

2.1 Représentation du cycle sur un diagramme de Mollier

Tracer l'allure du trajet thermodynamique de l'évolution du gaz dans l'installation dans un diagramme $(h;s)$. Préciser le sens du cycle.

Correction

Le cycle est représenté sur la figure ci-dessous. On note en particulier que les compression et détente n'étant pas réversibles, l'entropie entre les états ② et ③, d'une part, et ④ et ①, d'autre part, est croissante (elle serait constante si les transformations étaient réversibles). Entre les états ① et ②, le gaz se réchauffe de manière à extraire la chaleur de la chambre froide. Le sens du cycle est représenté sur cette figure.

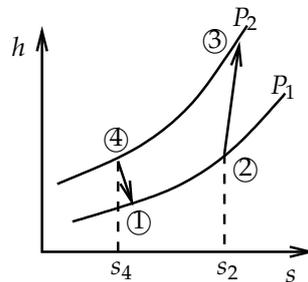


FIGURE 4 – Représentation du cycle thermodynamique dans le diagramme $(h;s)$.

2.2 Détermination de tous les états du fluide au cours du cycle

Déterminer les températures T_1 et T_3 .

Correction

On suppose tout d'abord que la compression est adiabatique réversible, c'est-à-dire isentropique. On note T_3^{is} la température correspondant à cette compression isentropique. Le gaz étant supposé avoir un comportement de gaz parfait et γ étant supposé être constant, on a

$$\left(\frac{T_2}{T_3^{is}}\right)^\gamma = \left(\frac{P_2}{P_3}\right)^{\gamma-1}$$

soit

$$T_3^{is} = T_2 \left(\frac{P_3}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

On trouve :

$$T_3^{is} = 362.72 \text{ K}$$

Par définition du rendement isentropique d'un compresseur, on a :

$$\eta_c^{is} = \frac{h_3^{is} - h_2}{h_3 - h_2}$$

Or, le gaz étant supposé avoir un comportement de gaz parfait à C_p constant, on a

$$h - h_0 = C_p (T - T_0)$$

où $h_0 = h(T_0)$ et où T_0 est une température de référence. Par conséquent

$$\eta_c^{is} = \frac{T_3^{is} - T_2}{T_3 - T_2}$$

soit

$$T_3 = T_2 + \frac{T_3^{is} - T_2}{\eta_c^{is}}$$

L'application numérique donne

$$T_3 = 366,79 \text{ K}$$

En appliquant la même démarche à la turbine, on a :

$$\left(\frac{T_1^{is}}{T_4}\right)^\gamma = \left(\frac{P_1}{P_4}\right)^{\gamma-1}$$

soit

$$T_1^{is} = T_4 \left(\frac{P_1}{P_4}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

On trouve :

$$T_1^{is} = 222.83 \text{ K}$$

Le rendement isentropique de la turbine est

$$\eta_d^{is} = \frac{T_4 - T_1}{T_4 - T_1^{is}}$$

soit

$$T_1 = T_4 + \eta_d^{is} (T_1^{is} - T_4)$$

L'application numérique donne

$$T_1 = 226,12 \text{ K}$$

En résumé, on a :

$P_1 = 1 \text{ bar}$	$T_1 = 226.12 \text{ K}$
$P_2 = 1 \text{ bar}$	$T_2 = 265 \text{ K}$
$P_3 = 3 \text{ bar}$	$T_3 = 366.79 \text{ K}$
$P_4 = 3 \text{ bar}$	$T_4 = 305 \text{ K}$

2.3 Détermination des énergies échangées à chaque composant du circuit

Déterminer les énergies calorifiques massiques fournies au fluide aux échangeurs et les énergies mécaniques massiques fournies au fluide au compresseur et à la turbine.

En déduire l'énergie massique devant être fournie par le moteur au compresseur.

Correction

Pour toutes ces déterminations, on applique le premier principe de la thermodynamique à un système ouvert. L'écoulement étant stationnaire et les variations d'énergies potentielle et cinétique étant négligeables, on a

$$\dot{m}(h_s - h_e) = \dot{W}' + \dot{Q}$$

où h_s et h_e sont les enthalpies massiques respectivement en sortie et en entrée du composant considéré. Du fait des hypothèses sur le comportement thermodynamique du fluide, on a

$$\frac{\dot{W}' + \dot{Q}}{\dot{m}} = Cp(T_s - T_e)$$

Pour le compresseur et la turbine, $\dot{Q} = 0$ et pour les échangeurs, $\dot{W}' = 0$.

Au compresseur, on a

$$\frac{\dot{W}'_c}{\dot{m}} = Cp(T_3 - T_2)$$

On obtient

$$\frac{\dot{W}'_c}{\dot{m}} = 105.78 \text{ kJ/kg}$$

Le signe est positif car le fluide reçoit de l'énergie au compresseur.

A la turbine, on a

$$\frac{\dot{W}'_t}{\dot{m}} = Cp(T_1 - T_4)$$

On obtient

$$\frac{\dot{W}'_t}{\dot{m}} = -81.98 \text{ kJ/kg}$$

Le signe est négatif car le fluide cède de l'énergie à la turbine.

On remarque que le travail fourni par le fluide à la turbine n'est pas suffisant pour que la turbine puisse fournir tout le travail nécessaire au compresseur pour augmenter la pression du fluide. C'est pourquoi un moteur auxiliaire est nécessaire au compresseur.

A l'échangeur avec la chambre froide, on a

$$\frac{\dot{Q}_f}{\dot{m}} = Cp(T_2 - T_1)$$

On obtient

$$\frac{\dot{Q}_f}{\dot{m}} = 40.41 \text{ kJ/kg}$$

Le signe est positif car le fluide reçoit de l'énergie cédée par la chambre froide.

A l'échangeur atmosphérique, on a

$$\frac{\dot{Q}_c}{\dot{m}} = Cp(T_4 - T_3)$$

On obtient

$$\frac{\dot{Q}_c}{\dot{m}} = -64.21 \text{ kJ/kg}$$

Le signe est négatif car le fluide cède de la chaleur à l'extérieur.

Pour déterminer l'énergie massique fournie par le moteur auxiliaire au compresseur, on doit décomposer la puissance massique fournie au fluide par le compresseur : cette puissance est la somme de la puissance transmise par la turbine et de la puissance fournie par la moteur. On a donc :

$$\dot{W}'_c = -\dot{W}'_t + \dot{W}_m$$

La puissance fournie par la turbine au compresseur est bien l'opposée de la puissance fournie par la turbine au fluide.

On obtient :

$$\frac{\dot{W}_m}{\dot{m}} = 23.81 \text{ kJ/kg}$$

Ce résultat peut également se trouver en faisant un bilan d'énergie sur le cycle complet :

$$\frac{\dot{W}_m + \dot{Q}_f + \dot{Q}_c}{\dot{m}} = 0$$

On trouve

$$\frac{\dot{W}_m}{\dot{m}} = 23.81 \text{ kJ/kg}$$

On trouve donc bien le même résultat.

Les différentes énergies massiques sont résumées dans le tableau ci-dessous.

	\dot{Q}/\dot{m} (kJ/kg)	\dot{W}/\dot{m} (kJ/kg)
Compresseur	0	105.78
Refroidisseur atmosphérique	-64.21	0
Turbine	0	-81.98
Echangeur	40.41	0
Moteur	0	23.81

2.4 Dissipations exergetiques

On suppose que les échanges thermiques au refroidisseur atmosphérique et à l'échangeur avec la chambre froide se font à une température d'échange respectivement de 300 K et de 260 K. On considère que le milieu ambiant est à pression atmosphérique et à une température de 280 K.

Déterminer les dissipations exergetiques à chaque composant du circuit.

Correction

On commence par déterminer une forme générale de la dissipation d'exergie \dot{D}^* . Considérons comme système le fluide circulant dans un composant quelconque du circuit. L'expression générale du bilan d'exergie pour ce système est le suivant :

$$\frac{d(\mathcal{U} - T^* \mathcal{S} + \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p)}{dt} = \sum_{e-s} \dot{m} (h - T_a s + e_c + e_p) + \dot{Q} \left(1 - \frac{T_a}{T_{ech}}\right) + \dot{W}' - \dot{D}^*$$

Par ailleurs, l'expression générale du bilan d'énergie est le suivant :

$$\frac{d(\mathcal{U} + \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p)}{dt} = \sum_{e-s} \dot{m} (h + e_c + e_p) + \dot{Q} + \dot{W}'$$

L'écoulement étant stationnaire et les variations d'énergies cinétique et potentielle étant supposées négligeables, ces expressions deviennent :

$$\sum_{e-s} \dot{m} (h - T_a s) + \dot{Q} \left(1 - \frac{T_a}{T_{ech}}\right) + \dot{W}' - \dot{D}^* = 0$$

$$\sum_{e-s} \dot{m} h + \dot{Q} + \dot{W}' = 0$$

En combinant ces deux équations, on arrive à l'expression suivante de la dissipation d'exergie :

$$\dot{D}^* = T_a \left(- \sum_{e-s} \dot{m} s - \frac{\dot{Q}}{T_{ech}} \right)$$

On peut remarquer que cette expression peut se retrouver facilement à partir de l'expression du bilan d'entropie et du lien entre les dissipations d'entropie et d'exergie.

Par ailleurs, chaque composant étant traversé par un seul fluide et l'écoulement étant stationnaire, \dot{m} est constant et on a donc

$$\frac{\dot{D}^*}{\dot{m}} = T_a \left(- \sum_{e-s} s - \frac{\dot{Q}/\dot{m}}{T_{ech}} \right)$$

Cette expression montre qu'il est nécessaire de calculer la variation d'entropie. Le fluide étant supposé avoir le comportement d'un gaz parfait à C_p constant, on a :

$$s_j - s_i = C_p \ln \left(\frac{T_j}{T_i} \right) - r \ln \left(\frac{P_j}{P_i} \right)$$

On applique ces relations à chaque composant.

Compresseur

$$\frac{\dot{D}_c^*}{\dot{m}} = T_a (s_3 - s_2)$$

Refroidisseur atmosphérique

$$\frac{\dot{D}_{ch}^*}{\dot{m}} = T_a \left((s_4 - s_3) - \frac{\dot{Q}_c/\dot{m}}{(T_{ech})_{ch}} \right)$$

Turbine

$$\frac{\dot{D}_t^*}{\dot{m}} = T_a (s_1 - s_4)$$

Echangeur chambre froide

$$\frac{\dot{D}_{fr}^*}{\dot{m}} = T_a \left((s_2 - s_1) - \frac{\dot{Q}_f/\dot{m}}{(T_{ech})_{fr}} \right)$$

Les calculs numériques donnent les valeurs données dans le tableau suivant :

	\dot{D}^*/\dot{m} (kJ/kg)
Compresseur	3.25
Refroidisseur atmosphérique	6.25
Turbine	4.26
Echangeur	2.66

On remarque avant tout que toutes les valeurs de \dot{D}^* sont positives, ce qui est cohérent avec le second principe de la thermodynamique.

Ce tableau montre que l'essentiel de la dissipation d'exergie a lieu au refroidisseur atmosphérique alors que l'échangeur de la chambre froide est le composant qui dissipe le moins d'exergie. On note enfin que le rendement isentropique de 96% du compresseur et de la turbine est responsable d'une part non négligeable de la dissipation d'exergie totale.

D'un point de vue physique, les sources de dissipation ne sont pas les mêmes aux échangeurs (refroidisseur atmosphérique et échangeur) et dans les machines tournantes (compresseur et turbine). Dans les machines tournantes, l'essentiel de la dissipation est dû à des irréversibilités internes au fluide telles que le frottement du fluide (effets visqueux qui représentent le frottement entre les filets fluides). Dans les échangeurs, l'essentiel de la dissipation est dû aux différences de température entre le fluide externe et le gaz du cycle : du fait de cette différence de température, même si la chaleur perdue par le fluide chaud est égale à la chaleur reçue par le fluide froid (par application du bilan d'énergie), l'entropie cédée n'est pas égale à l'entropie reçue. Le transfert de chaleur se faisant pour une valeur finie de l'écart de température entre les fluides chaud et froid, le transfert thermique (par conduction à travers la paroi solide séparant les deux fluides) induit une dissipation d'entropie (par conduction).

2.5 Rendement exergetique de l'installation

Définir et déterminer le rendement exergetique de l'installation.

Correction

Le rendement exergetique d'une installation est le rapport entre les puissances exergetiques « utiles » et les puissances exergetiques « dépensées ». Dans le cas de cette installation, on est intéressé par la puissance exergetique de l'échangeur avec la chambre froide et on doit dépenser la puissance fournie au compresseur.

On peut donc définir le rendement exergetique de l'installation de la manière suivante :

$$\eta_{ex} = \frac{|(\dot{Q}_f / \dot{m})(1 - T_a / T_{ech})|}{|\dot{W}_m / \dot{m}|}$$

On trouve

$$\eta_{ex} = 13\%$$

2.6 Débit de masse

On suppose que, en fonctionnement stationnaire, la chambre froide a une « perte » thermique moyenne de 100 kW.

En déduire le débit de masse de gaz dans le circuit ainsi que la puissance du moteur couplé au compresseur.

Correction

On fait un bilan d'énergie sur l'ensemble des constituants de la chambre froide (air, denrées, etc.). On note \mathcal{U} l'énergie interne de ce système et \dot{Q}_p la puissance des « pertes » thermiques de la chambre froide ($\dot{Q}_p > 0$ car la chambre froide a tendance à se réchauffer et reçoit donc de la chaleur de l'extérieur). Le système considéré est fermé et il n'y a pas de variation d'énergies cinétique et potentielle ; le premier principe de la thermodynamique s'écrit donc

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \dot{Q}_p - \dot{Q}_f$$

La puissance thermique fournie au gaz du circuit de refroidissement \dot{Q}_f est extraite de la chambre froide et la puissance correspondante fournie (algébriquement) à la chambre froide est donc $(-\dot{Q}_f)$.

En stationnaire, on a donc

$$\dot{Q}_f = \dot{Q}_p = 100 \text{ kW}$$

On a donc

$$\dot{m} = \dot{Q}_p \frac{\dot{m}}{\dot{Q}_f} = \frac{100}{40.41} = 2.47 \text{ kg/s}$$

La puissance du moteur est donc

$$\dot{W}_m = 2.47 \times 23.81 = 58.92 \text{ kW}$$

3 Questions complémentaires

3.1 Utilisation de l'énergie cédée à l'échangeur atmosphérique

Dans le cycle considérée, l'énergie thermique cédée par le gaz à l'échangeur atmosphérique est « perdue ». Cette énergie pourrait être utilisée pour fournir du travail au compresseur.

Déterminer l'énergie mécanique massique maximale pouvant être récupérée à l'échangeur atmosphérique.

Si l'intégralité de cette énergie est récupérée pour être transmise au compresseur, déterminer le nouveau rendement exergetique de l'installation.

Correction

Aucune machine ne peut être plus efficace qu'une machine de Carnot. On suppose donc que la chaleur cédée par le gaz à l'échangeur atmosphérique est couplée à une machine de Carnot : le gaz constitue la source chaude tandis que l'air ambiant en constitue la source froide (on a en effet $(T_{ech})_{ch} > T_a$).

Or, si une quantité d'énergie thermique Q est fournie à la machine de Carnot réversible par la source chaude, le travail fourni est $(1 - T_a / (T_{ech})_{ch}) Q$ et l'énergie thermique transmise à la source froide est $(T_a / (T_{ech})_{ch}) Q$.

Appliqué à l'installation considérée, on a :

$$\frac{\dot{W}_{ech}^{max}}{\dot{m}} = \left(1 - \frac{T_a}{(T_{ech})_{ch}}\right) \frac{\dot{Q}_c}{\dot{m}} = -4.28 \text{ kJ/kg}$$

Ici, le signe est bien négatif si l'on se place du point de vue de la machine de Carnot qui fournit du travail à l'extérieur.

Cette valeur est à comparer aux 23.81 kJ/kg de l'énergie nécessaire au moteur, ce qui représente près de 20% de la puissance du moteur.

Si on suppose que toute cette énergie peut effectivement être récupérée et transmise au compresseur, la puissance du moteur se trouve diminuée d'autant et on trouve une nouvelle énergie massique de 19.53 kJ/kg. On trouve alors un nouveau rendement exergetique de 16%.

3.2 Utilisation de plusieurs étages de compression

3.2.1 Compression isotherme

Par un bilan d'énergie, montrer qu'une compression isotherme est « gratuite » en énergie.

Correction

Le bilan d'énergie s'écrit :

$$\dot{m} (h_s - h_e) = \dot{W}' + \dot{Q}$$

dans le cas où l'on néglige les variations d'énergies potentielle et cinétique et où l'on suppose que l'écoulement est stationnaire. Si le gaz est modélisé comme un gaz parfait à C_p constant, on a :

$$\dot{m} C_p (T_s - T_e) = \dot{W}' + \dot{Q}$$

Par conséquent, si $T_s = T_e$, la compression est énergétiquement « gratuite » : l'énergie fournie sous forme de travail est transformée en chaleur.

3.2.2 Etude d'un étage de compression

Il est technologiquement difficile de faire une compression isotherme. C'est pourquoi on essaie de s'approcher d'une telle transformation en effectuant des compressions par étages : on comprime le fluide dans un compresseur adiabatique puis on fait passer le fluide dans un refroidisseur intermédiaire pour le ramener à sa température initiale. Cette double transformation constitue un étage. On multiplie les étages pour arriver à la pression finale désirée. La question qui se pose est de savoir comment optimiser le système en déterminant les pressions intermédiaires de chaque étage de compression.

En supposant la compression adiabatique réversible (et le gaz parfait à C_p constant), déterminer la dissipation d'exergie d'un étage en fonction du rapport des pressions et de la température d'entrée.

Correction

Au compresseur, on a

$$\frac{T_s}{T_e} = \left(\frac{P_s}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

et

$$\dot{m} C_p (T_s - T_e) = \dot{W}'$$

D'où :

$$\frac{\dot{W}'}{\dot{m}} = C_p T_e \left(\left(\frac{P_s}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = -\frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$$

Avec les hypothèses du problème, le bilan d'exergie sur l'étage s'écrit :

$$\dot{m} (ex_s - ex_e) = \dot{Q} \left(1 - \frac{T_a}{T_{ech}} \right) + \dot{W}' - \dot{D}^*$$

Or, $T_s = T_e$ et

$$s_s - s_e = -r \ln \left(\frac{P_s}{P_e} \right)$$

On a donc :

$$\boxed{\frac{\dot{D}^*}{\dot{m}} = -T_a r \ln \left(\frac{P_s}{P_e} \right) + C_p T_e \left[\left(\frac{P_s}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \frac{T_a}{T_{ech}}}$$

3.2.3 Optimisation d'une compression à deux étages

On considère une compression à deux étages. Les pressions d'entrée et de sortie P_e et P_s sont supposées fixées et on note P_2 la pression intermédiaire (sortie du premier étage et entrée du second). On cherche à déterminer la pression P_2 qui optimise le système.

Déterminer la dissipation d'exergie totale de la compression à deux étages et en déduire la valeur du facteur de compression optimal du premier étage (P_2/P_e).

Correction

Les dissipations des deux étages s'additionnent et on a donc (en supposant que la température d'échange est la même pour les échangeurs des deux étages) :

$$\frac{\dot{D}^*}{\dot{m}} = -T_a r \left[\ln \left(\frac{P_2}{P_e} \right) + \ln \left(\frac{P_s}{P_2} \right) \right] + C_p T_e \left[\left(\frac{P_2}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{P_s}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2 \right] \frac{T_a}{T_{ech}}$$

soit

$$\frac{\dot{D}^*}{\dot{m}} = -T_a r \ln \left(\frac{P_s}{P_e} \right) + C_p T_e \left[\left(\frac{P_2}{P_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{P_s}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2 \right] \frac{T_a}{T_{ech}}$$

Le système est optimal lorsque la dissipation d'exergie est minimale. Ici, la seule variable du système est P_2 et à cet optimum, on a donc $(\partial \dot{D}^* / \partial P_2) = 0$. D'après l'expression ci-dessus, on montre que cette condition s'écrit :

$$P_2 = \sqrt{P_e P_s}$$

ce qui peut se réécrire sous la forme :

$$\boxed{\frac{P_2}{P_e} = \frac{P_s}{P_2}}$$

Cela signifie que les deux étages de la compression ont le même rapport de compression.

3.2.4 Généralisation à un nombre N d'étages

En suivant le même raisonnement mais pour un nombre N quelconque d'étages de compression, déterminer les facteurs de compression optimaux des étages de compression.

Correction

On note (P_2, \dots, P_N) les pressions intermédiaires. Pour simplifier l'écriture on note $P_1 = P_e$ et $P_{N+1} = P_s$, sachant que ces deux pressions sont fixées.

La dissipation totale s'écrit :

$$\frac{\dot{D}^*}{\dot{m}} = -T_a r \ln \left(\frac{P_s}{P_e} \right) + C_p T_e \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{P_{i+1}}{P_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - N \right] \frac{T_a}{T_{ech}}$$

C'est une fonction de (P_2, \dots, P_N) . A son minimum, on a donc $(\partial \dot{D}^* / \partial P_i) = 0, \forall i \in \{2, \dots, N\}$. Cette condition amène à la condition suivante :

$$\boxed{\forall i \in \{2, \dots, N\}, \frac{P_i}{P_{i-1}} = \frac{P_{i+1}}{P_i} = \sqrt[N]{\frac{P_s}{P_e}}}$$

ce qui signifie que tous les étages ont le même facteur de compression.

3.2.5 Application au cycle de réfrigération

Comment appliquer ce résultat au cas du cycle de réfrigération étudié ?

Ce cycle complet peut être étudié en guise d'exercice complémentaire (en imposant que les états du fluide en entrée et sortie de l'échangeur avec la chambre froide sont les mêmes que dans le cas du cycle étudié).

Correction

Ce résultat peut être appliqué en remplaçant la compression par deux compressions successives avec un refroidissement intermédiaire.

Le circuit correspondant est schématisé sur la figure ci-dessous.

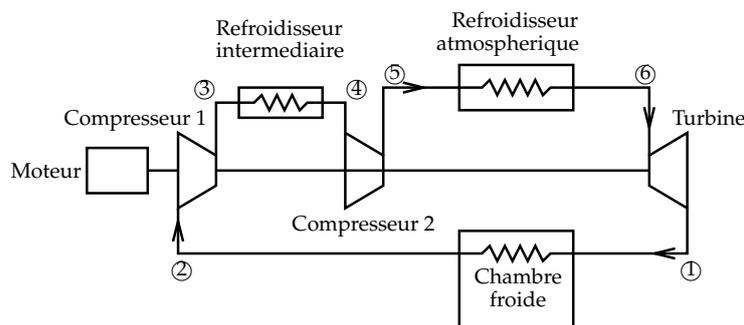


FIGURE 5 – Schématisation de l'installation comprenant deux compresseurs avec refroidissement intermédiaire.

On suppose que les deux compresseurs ont les mêmes caractéristiques et notamment un rapport de compression de 2. Par ailleurs, on suppose que les températures du fluide à l'entrée des deux compresseurs sont les mêmes. On impose enfin que la température du fluide en entrée de la turbine est la même que précédemment.

L'installation doit fournir le même service, à savoir retirer une quantité de chaleur donnée à la chambre froide.

Le cycle correspondant à cette installation est schématisé ci-dessous.

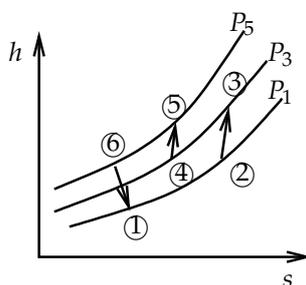


FIGURE 6 – Représentation du nouveau cycle thermodynamique dans le diagramme $(h; s)$.

Les états connus du fluide sont donnés dans le tableau ci-dessous.

$P_1 = 1 \text{ bar}$	
$P_2 = 1 \text{ bar}$	$T_2 = 265 \text{ K}$
$P_3 = 1.73 \text{ bar}$	
$P_4 = 1.73 \text{ bar}$	$T_4 = 265 \text{ K}$
$P_5 = 3 \text{ bar}$	
$P_6 = 3 \text{ bar}$	$T_6 = 305 \text{ K}$

Pour les deux compresseurs, si l'on note par les indices e et s les états d'entrée et de sortie respectivement, on a

$$\left(\frac{T_s^{is}}{T_e}\right)^\gamma = \left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{\gamma-1}$$

et

$$\eta_c^{is} = \frac{T_s^{is} - T_e}{T_s - T_e}$$

Les deux compresseurs ayant le même taux de compression (P_s/P_e) et le même rendement isentropique et la température à l'entrée des deux compresseurs étant la même, les températures en sortie des deux compresseurs sont les mêmes. On trouve :

$$T_3 = T_5 = 311.91 \text{ K}$$

De même, à la turbine, on a

$$\left(\frac{T_s^{is}}{T_e}\right)^\gamma = \left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{\gamma-1}$$

et

$$\eta_t^{is} = \frac{T_s - T_e}{T_s^{is} - T_e}$$

On trouve

$$T_1 = 226.12 \text{ K}$$

Pour chaque compresseur, l'application du premier principe de la thermodynamique s'écrit (avec l'ensemble des hypothèses faites) :

$$\dot{m} C_p (T_s - T_e) = \dot{W}'_c$$

On en déduit :

$$\frac{\dot{W}'_{c1}}{\dot{m}} = \frac{\dot{W}'_{c2}}{\dot{m}} = 48.75 \text{ kJ/kg}$$

Les états du fluide en entrée et en sortie de la turbine étant les mêmes que dans le cycle précédent, le travail massique fourni au fluide est également le même :

$$\frac{\dot{W}'_t}{\dot{m}} = -81.98 \text{ kJ/kg}$$

Or

$$\dot{W}'_t = \dot{W}_m - \dot{W}'_c = \dot{W}'_m - \dot{W}'_{c1} - \dot{W}'_{c2}$$

On trouve alors facilement :

$$\frac{\dot{W}'_m}{\dot{m}} = 15.52 \text{ kJ/kg}$$

Les différentes énergies massiques sont résumées dans le tableau ci-dessous.

	\dot{Q}/\dot{m} (kJ/kg)	\dot{W}/\dot{m} (kJ/kg)
Compresseur 1	0	48.75
Refroidisseur intermédiaire	-48.75	0
Compresseur 2	0	48.75
Refroidisseur atmosphérique	-7.18	0
Turbine	0	-81.98
Echangeur	40.41	0
Moteur	0	15.52

La puissance thermique échangée avec la chambre froide est la même que dans le premier cycle étudié. Le bilan d'énergie de la chambre froide est donc identique et le débit de masse également :

$$\dot{m} = 2.47 \text{ kg/s}$$

La puissance du moteur est donc

$$\dot{W}_m = 38.41 \text{ kW}$$

Cette puissance est inférieure à celle du premier cycle étudié, ce qui montre l'intérêt d'utiliser plusieurs étages de compression avec refroidissement intermédiaire.

Pour ce qui est des dissipations d'exergie, les calculs numériques donnent les valeurs données dans le tableau suivant :

	\dot{D}^* / \dot{m} (kJ/kg)
Compresseur 1	1.76
Refroidisseur intermédiaire	5.07
Compresseur 2	1.76
Refroidisseur atmosphérique	0.18
Turbine	4.26
Echangeur	2.66

On remarque que la dissipation d'exergie au refroidisseur atmosphérique est fortement diminuée, ce qui est dû au fait que la quantité d'énergie échangée a fortement diminuée.

Le rendement exergetique garde la même définition mais sa valeur est augmentée du fait de la baisse de la puissance électrique nécessaire. On trouve en effet $\eta_{ex} = 20\%$.

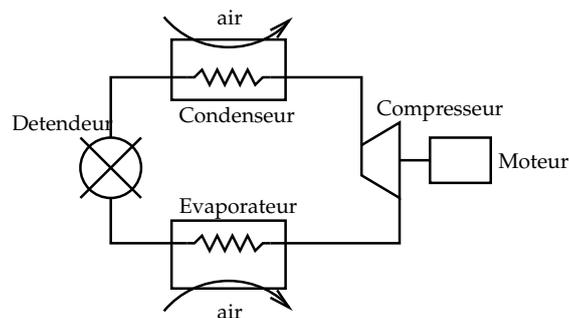
PC N°4

Dimensionnement d'une pompe à chaleur

Corrigé

L'objectif est d'étudier une pompe à chaleur. Cette pompe à chaleur fonctionne sur la base d'un cycle de Rankine avec comme fluide caloporteur le R142b dont certaines propriétés thermodynamiques sont données en annexe.

Le circuit fluide et ses différents composants sont schématisés sur la figure ci-dessous.



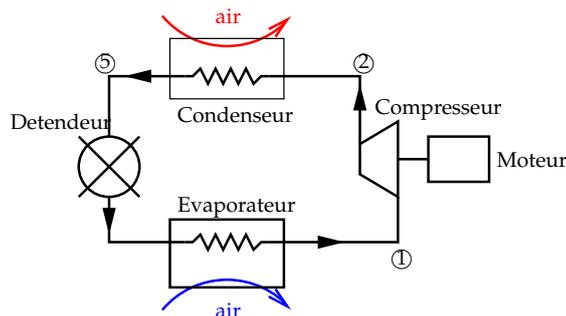
L'objectif de cette pompe à chaleur est de chauffer l'air d'un bâtiment.

1 Description du cycle

Indiquer le sens de circulation du fluide et décrire le cycle.

Correction

L'objectif de ce cycle étant de réchauffer l'air, la chaleur est transmise du fluide caloporteur à l'air du bâtiment au condenseur : en se condensant, le fluide caloporteur cède son énergie à l'air. Le sens de circulation du fluide dans le circuit est donc celui indiqué sur la figure ci-dessous.

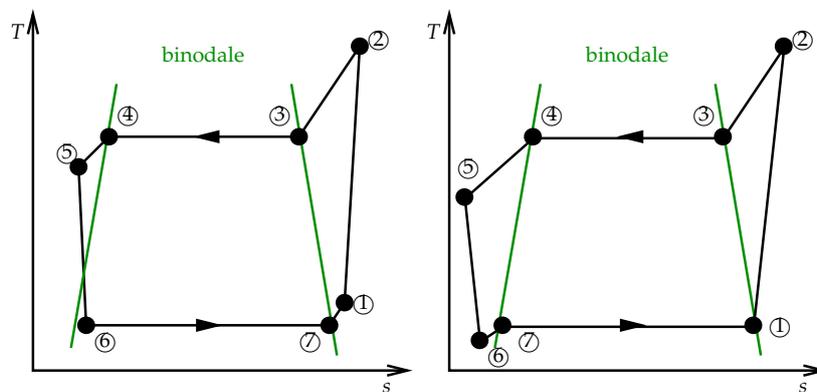


Le fluide est sous forme monophasique vapeur (ou en tout cas très riche en vapeur) à l'entrée du compresseur et est comprimé par celui-ci, ce qui induit une hausse de la température du fluide (en plus d'une hausse de sa pression). Le fluide est refroidi au condenseur où il cède une partie de son énergie à l'air ; ce refroidissement se fait à pression constante et le fluide à la sortie du condenseur est généralement à l'état liquide légèrement sous-refroidi. La pression du fluide s'abaisse à la traversée du détendeur, ce qui s'accompagne d'une baisse de la température ; le fluide est généralement sous forme diphasique (riche en liquide) à la sortie du détendeur. Le fluide est alors transformé en vapeur (légèrement surchauffée) à l'évaporateur ; cette transformation est isobare.

Indiquer l'allure du cycle dans un diagramme ($T; s$) en y indiquant les états caractéristiques du fluide.

Correction

L'allure générale du cycle est donnée sur les figures ci-dessous. Avec les données fournies à ce stade, on ne sait pas encore si les états en entrée et sortie du compresseur et en entrée et sortie du détendeur sont diphasiques ou monophasiques. Plusieurs cycles sont possibles tels que représentés sur les figures ci-dessous.



2 Etats du fluide au cours du cycle

La vapeur à l'entrée du compresseur est à une pression de 1.5 bar et à une température de 0°C , le fluide sort du condenseur à une température de 35°C et la vaporisation a lieu à une pression de 1.5 bar. La pression à la sortie du compresseur est de 5.2 bar et le compresseur a un rendement isentropique de 84.8%.

Déterminer les états du fluide aux différents points caractéristiques du cycle.

Correction

Etat ① en entrée du compresseur

Les données thermodynamiques permettent de déterminer que le fluide à l'entrée du compresseur est sous forme de vapeur surchauffée : sa température (0°C) est supérieure à sa température de saturation à 1.5 bar (-10°C).

Par ailleurs, les données thermodynamiques permettent de déterminer les propriétés de la vapeur dans l'état ① :

P (bar)	T ($^{\circ}\text{C}$)	h (kJ/kg)	s (kJ/(kg.K))
1.5	0	417.80	1.820

Etat ② en sortie du compresseur

On suppose dans un premier temps que la compression est réversible ; étant adiabatique, elle est donc isentropique. La vapeur se trouve alors à une pression de 5.2 bar et son entropie est égale à 1.820 kJ/(kg.K). Les données thermodynamiques ne donnent pas les caractéristiques du fluide pour cet état. On effectue alors une interpolation linéaire entre les états voisins :

$$h_2^{is} \simeq 450.84 + \frac{544.62 - 450.84}{1.825 - 1.811} \times (1.820 - 1.811) = 453.91 \text{ kJ/kg}$$

P (bar)	h (kJ/kg)	s (kJ/(kg.K))
5.2	450.84	1.811
5.2	453.91	1.820
5.2	455.62	1.825

Le rendement isentropique du compresseur est de 84.8%. On a donc :

$$\eta_C = \frac{h_2^{is} - h_1}{h_2 - h_1}$$

soit

$$h_2 = h_1 + \frac{h_2^{is} - h_1}{\eta_C}$$

$$h_2 = 417.80 + \frac{543.91 - 417.80}{0.848} = 460.4 \text{ kJ/kg}$$

Les données thermodynamiques permettent alors de déterminer les propriétés de la vapeur dans l'état ②.

P (bar)	T (°C)	h (kJ/kg)	s (kJ/(kg.K))
5.2	60	460.40	1.840

Etat ⑤ en sortie de condenseur

La condensation se fait à pression constante de 5.2 bar. A cette pression, les données thermodynamiques indiquent que la température de saturation est de 40°C. Or, en sortie de condenseur, la température (35°C) est inférieure à la température de saturation, ce qui signifie que le fluide est du liquide sous-refroidi. A 5.2 bar et 35°C, les données thermodynamiques permettent de déterminer h_5 et s_5 .

P (bar)	T (°C)	h (kJ/kg)	s (kJ/(kg.K))
5.2	35	245.57	1.150

Etat en sortie de détenteur

Par application du bilan d'énergie sur le fluide dans le détenteur, on a

$$h_6 = h_5 = 245.57 \text{ kJ/kg}$$

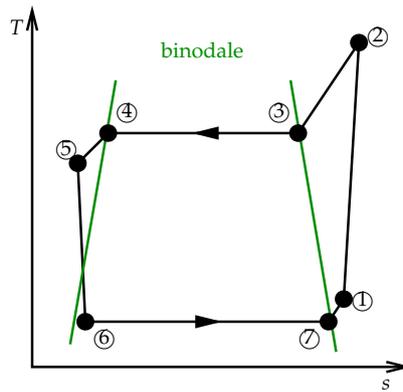
On sait par ailleurs que la pression en sortie du détenteur est de 1.5 bar. Les données thermodynamiques montrent que, pour cette pression, l'enthalpie du fluide (245.57 kJ/kg) est supérieure à l'enthalpie du liquide à saturation (187.19 kJ/kg). Cela signifie donc que le fluide en sortie du détenteur est diphasique. Le titre de vapeur x_v est donné par

$$x_v = \frac{h - h_l^{sat}}{h_v^{sat} - h_l^{sat}} = 26,23\%$$

L'entropie du système diphasique est alors donnée par

$$s_6 = s_l^{sat} + x_v (s_v^{sat} - s_l^{sat}) = 0.952 + 0.2623 \times (1.798 - 0.952) = 1.174 \text{ kJ/(kg.K)}$$

A ce stade de l'analyse, on a déterminé que l'allure du cycle est celui de la figure ci-dessous.



Il ne reste alors plus qu'à déterminer les caractéristiques des états du fluide à saturation.

Etat ⑦

Cet état correspond à la vapeur à saturation à 1.5 bar dont on peut trouver les caractéristiques thermodynamiques dans la table.

P (bar)	T (°C)	h (kJ/kg)	s (kJ/(kg.K))
1.5	-10	409.76	1.798

Etats ③ et ④

Ce sont les états à saturation respectivement vapeur et liquide du fluide à 5.2 bar dont on peut connaître les caractéristiques grâce aux données thermodynamiques.

P (bar)	T (°C)	h (kJ/kg)	s (kJ/(kg.K))
5.2	40	252.14	1.177
5.2	40	441.27	1.781

Récapitulatif

Les caractéristiques du fluide dans les états des points caractéristiques du cycle sont récapitulées dans le tableau suivant. Les données en vert sont celles fournies, celles en bleu ont été déterminées à partir des tables thermodynamiques et celles en mauve ont été déterminées par calcul.

Etat	P	T	h	s	x_v
①	1.5	273.15	417.8	1.820	
②	5.2	333.15	460.4	1.840	
③	5.2	313.15	441.27	1.781	
④	5.2	313.15	252.14	1.177	
⑤	5.2	308.15	245.57	1.150	
⑥	1.5	263.15	245.57	1.174	0.2623
⑦	1.5	263.15	409.76	1.798	

3 Transferts énergétiques

Déterminer les transferts énergétiques aux différents composants du système.

Correction

Le bilan d'énergie s'écrit

$$\frac{\partial (\mathcal{U} + \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c)}{\partial t} = \sum_{e-s} \dot{m} (h + e_p + e_c) + \dot{Q} + \dot{W}'$$

L'écoulement étant stationnaire et les variations d'énergies cinétique et potentielle pouvant être négligées, ce bilan devient :

$$\dot{m} [h]_e^s = \dot{Q} + \dot{W}'$$

Détendeur

Il n'y a aucun transfert d'énergie dans le détendeur.

Evaporateur

Aucun travail n'est fourni au fluide et on a

$$\frac{\dot{Q}_{evap}}{\dot{m}} = h_1 - h_6 = 172.23 \text{ kJ/kg}$$

Compresseur

Aucun échange de chaleur n'a lieu au compresseur et on a

$$\frac{\dot{W}'_{comp}}{\dot{m}} = h_2 - h_1 = 42.6 \text{ kJ/kg}$$

Condenseur

Aucun travail n'est fourni au fluide et on a

$$\frac{\dot{Q}_{cond}}{\dot{m}} = h_5 - h_2 = -214.83 \text{ kJ/kg}$$

Récapitulatif

Les caractéristiques des composants de la machine étudiée sont données dans le tableau suivant.

Composant	\dot{Q}/\dot{m} (kJ/kg)	\dot{W}'/\dot{m} (kJ/kg)
Compresseur	0	42.6
Condenseur	-214.83	0
Détendeur	0	0
Evaporateur	172.23	0

On vérifie que la somme des énergies transférées est bien nulle.

Définir et déterminer le coefficient de performance de l'installation.

Correction

On définit le coefficient de performance par

$$\omega = \frac{-\dot{Q}_{cond}}{\dot{W}'_{comp}} = \frac{214.83}{42.6} = 5.04$$

On remarque que ce coefficient de performance est effectivement plus faible que celui d'une machine de Carnot réversible fonctionnant entre deux sources à température de 3.5°C et 26.4°C (cf. données fournies pour l'analyse exergétique) :

$$\omega_{max} = \frac{T_c}{T_c - T_f} = 13.08$$

On verra dans l'analyse exergétique qu'il peut être plus judicieux de définir une autre machine de Carnot.

On suppose que la puissance échangée au condenseur est de 31.18 kW.

Déterminer le débit de masse de fluide frigorigène et en déduire la puissance du moteur.
Analyser l'intérêt d'une pompe à chaleur.

Correction

On a

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}_{cond}}{\dot{Q}_{cond}/\dot{m}} = \frac{31.18}{214.83} = 0.145 \text{ kg/s}$$

La puissance du moteur est donnée par

$$\dot{W}' = 0.145 \times 42.6 = 6.2 \text{ kW}$$

Cette analyse montre que pour fournir 31.18 kW sous forme de chaleur, il est nécessaire de fournir seulement 6.2 kW sous forme de travail, par exemple électrique. Cela signifie que l'on dépense 5 fois moins d'énergie qu'on en reçoit (d'où la valeur du coefficient de performance). Le complément énergétique est apporté par l'énergie thermique transférée de la source froide à la source chaude. Mais, d'après le second principe, ce transfert ne pouvant pas se faire de manière spontanée, il est nécessaire de fournir du travail pour que ce transfert puisse se faire. Mais il n'empêche que l'essentiel du transfert thermique se fait par transfert de chaleur entre la source froide et la source chaude.

Si l'on devait utiliser un système électrique direct pour apporter l'énergie nécessaire, il faudrait transférer 31.18 kW directement par effet Joule. Cela signifie qu'un système de ce type permet de faire des économies d'énergie substantielles (mais au prix d'un investissement plus important).

4 Analyse exergetique

On suppose que les échanges thermiques au condenseur et à l'évaporateur se font à une température d'échange respectivement de 26.4°C et 3.5°C. On considère enfin que les conditions ambiantes sont 1 bar et 18°C.

Déterminer les variations d'exergie massique à la traversée de chaque composant et les créations d'exergie et d'entropie par unité de masse à chaque composant du circuit.

Commenter, en particulier la variation d'exergie à la traversée de l'évaporateur.

Correction

L'exergie massique est définie par

$$ex = h + e_c + e_p - T_a s$$

où T_a est la température du milieu ambiant.

En négligeant les variations d'énergies cinétique et potentielle, la variation d'exergie massique est

$$[ex]_e^s = [h]_e^s - T_a [s]_e^s$$

La création d'exergie est donnée par (pour un écoulement stationnaire qui est tel que $\dot{m}_s = \dot{m}_e = \dot{m}$)

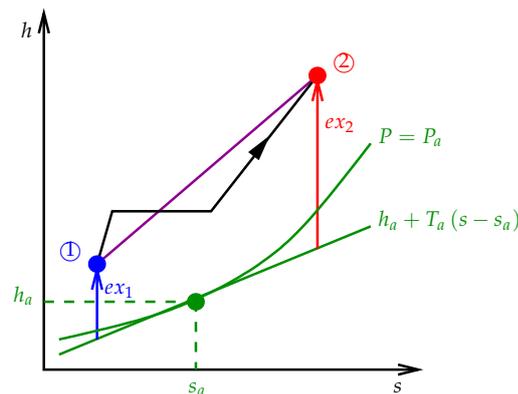
$$\frac{\dot{D}^*}{\dot{m}} = T_a \left(- \sum_{e-s} s - \frac{\dot{Q}}{T_{ech}} \right)$$

Appliquée aux différents composants, on obtient les valeurs données dans le tableau suivant.

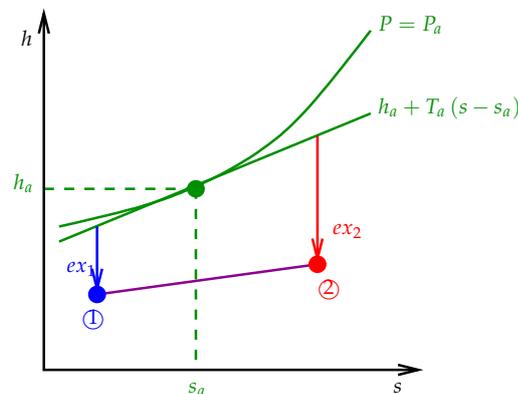
Composant	$[ex]_e^s$ (kJ/kg)	\dot{D}^*/\dot{m} (kJ/kg)	$\dot{\sigma}/\dot{m}$ (kJ/(kg.K))
Compresseur	36.76	5.82	0.0200
Condenseur	-13.92	7.90	0.0271
Détendeur	-6.99	6.99	0.0240
Evaporateur	-15.85	6.83	0.0234
Total	0	27.54	0.0946

On remarque que l'exergie diminue entre l'entrée et la sortie de l'évaporateur alors que le fluide gagne de l'énergie thermique. Ceci est dû au fait que l'on chauffe le fluide à une température quasiment constante (du fait du changement de phase) et inférieure à la température ambiante.

Pour toute transformation augmentant l'enthalpie du fluide, si cette transformation s'accompagne d'une augmentation de son entropie et même si cette transformation est réversible, l'intégralité de l'augmentation d'enthalpie ne peut pas se transformer en travail utile. C'est ce que traduit le terme en $(-T_a s)$ de l'expression de l'exergie, ce terme étant l'anergie du fluide. Il y a augmentation d'exergie uniquement si la pente de la droite reliant les points représentatifs des états du fluide en début et fin de transformation est supérieure à T_a (cf. schéma ci-dessous). Cette condition traduit le fait que quand il y a augmentation d'entropie, pour retourner à l'état ambiant, il faut céder une partie de l'énergie du fluide sous forme de chaleur à la source froide (dans le cas où l'exergie est positive), cette partie ne pouvant *jamais* être récupérée sous forme de travail, cette part « perdue » étant appelée anergie. Il faut donc que l'augmentation d'enthalpie soit supérieure à cette augmentation d'anergie.



Dans le cas qui nous intéresse de la vaporisation du fluide, la transformation se produit à une température inférieure à la température ambiante, ce qui se traduit par le fait que l'exergie du fluide diminue alors que son enthalpie augmente. C'est ce qui est schématisé sur la figure ci-dessous. Cela revient à dire que l'augmentation d'entropie de la transformation est telle que, lorsque l'on ramènera le fluide dans un état d'équilibre avec le milieu ambiant, on perdra plus d'énergie sous forme de chaleur que l'on récupèrera de travail.



On remarque que les dissipations d'exergie sont assez bien réparties entre les différents composants du circuit.

Définir et calculer le rendement exergetique de chaque composant et de la machine.

Correction

Au compresseur, on a

$$\eta_{ex} = \frac{\Delta ex}{\dot{W}'_{comp}/\dot{m}}$$

Au condenseur, on a

$$\eta_{ex} = \frac{\dot{Q}_{cond} (1 - T_a/T_{ech})}{\dot{m} \Delta ex}$$

A l'évaporateur, on a

$$\eta_{ex} = \frac{\dot{Q}_{evap} (1 - T_a/T_{ech})}{\dot{m} \Delta ex}$$

Au détenteur, il n'y a ni travail ni chaleur échangée alors que la variation d'exergie est non nulle, ce qui signifie que le rendement est nul.

Enfin, on peut définir le rendement exergetique de la manière suivante :

$$\eta_{ex} = \frac{|\dot{Q}_{cond} (1 - T_a/T_{ech})|}{\dot{W}'}$$

Composant	η_{ex}
Compresseur	86%
Condenseur	43%
Détendeur	0%
Evaporateur	57%
Machine	14%

On rappelle que le coefficient de performance de la pompe à chaleur est défini par

$$\omega = \frac{|\dot{Q}_{cond}|}{\dot{W}'}$$

et que le coefficient de performance d'une machine de Carnot fonctionnant entre les températures (chaude) T_{ech} et (froide) T_a est

$$\omega_{max} = \frac{T_{ech}}{T_{ech} - T_a}$$

On a donc

$$\eta_{ex} = \frac{\omega}{\omega_{max}}$$

Dans le cas considéré, les températures d'échange au condenseur ($T_{ech} = 26.4^\circ\text{C}$) et ambiante ($T_a = 18^\circ\text{C}$) sont assez voisines si bien que le coefficient de performance de la machine de Carnot est très élevé (35.66), ce qui explique la faible valeur du rendement exergetique. Plus les températures des sources froide et chaude sont voisines, moins il est « compliqué » de transférer la chaleur de la source froide à la source chaude, ce qui explique que le coefficient de performance tende vers l'infini si les deux températures sont égales.

5 Optimisation exergetique

On suppose que l'on n'apporte aucune modification au cycle thermodynamique du fluide caloporteur. On change cependant les caractéristiques de l'échangeur à l'évaporateur et les conditions ambiantes afin d'étudier l'effet de ces modifications sur le rendement de l'évaporateur et de la machine.

On suppose que la température d'échange à l'évaporateur est 0°C et on considère deux températures ambiantes : 18°C (cas précédent) et 25°C.

Pour les deux températures ambiantes considérées, déterminer la dissipation d'entropie et le rendement exergetique de l'évaporateur pour les deux températures d'échange considérées.

T_{ech}	η_{ex}	$\dot{\sigma}/\dot{m}$
3.5°C		
0°C		

Correction

A l'évaporateur, on a :

$$\frac{\dot{\sigma}}{\dot{m}} = [s]_6^1 - \frac{\dot{Q}_{evap}/\dot{m}}{T_{ech}}$$

L'état du fluide n'étant pas modifié, $[s]_6^1$ et \dot{Q}_{evap}/\dot{m} sont donnés et leurs valeurs ne sont donc pas modifiées. L'entropie créée dépend donc uniquement de la température d'échange T_{ech} :

$$\frac{\dot{\sigma}}{\dot{m}} = 0.646 - \frac{172.23}{T_{ech}}$$

T_{ech}	$\dot{\sigma}/\dot{m}$
3.5°C	0.0234
0°C	0.0155

Cela montre en particulier que la création d'entropie est plus faible pour une température d'échange de 0°C. Ceci est dû au fait que l'écart de température entre le fluide caloporteur et l'air avec lequel il échange la chaleur est plus faible, ce qui réduit les irréversibilités externes.

L'expression du rendement exergetique de l'évaporateur est

$$\eta_{ex} = \frac{\dot{Q}_{evap} (1 - T_a/T_{ech})}{\dot{m} \Delta ex}$$

soit

$$\eta_{ex} = \frac{\dot{Q}_{evap}}{\dot{m}} \frac{1 - T_a/T_{ech}}{[h]_6^1 - T_a [s]_6^1}$$

Dans cette expression, seules T_a et T_{ech} varient. On a donc

$$\eta_{ex} = 172.23 \times \frac{1 - T_a/T_{ech}}{172.23 - 0.646 \times T_a}$$

A la température ambiante de 18°C, on a :

T_{ech}	η_{ex}	$\dot{\sigma}/\dot{m}$
3.5°C	57%	0.0234
0°C	71%	0.0155

Ce tableau montre que le rendement exergetique augmente dans une proportion plus forte que la baisse de la production d'entropie.

A la température ambiante de 25°C, on a :

T_{ech}	η_{ex}	$\dot{\sigma} / \dot{m}$
3.5°C	66%	0.0234
0°C	77%	0.0155

Ces deux tableaux montrent l'influence de la température ambiante sur le rendement exergetique : alors que la source d'entropie n'est pas influencée par la température ambiante, le rendement exergetique de l'évaporateur augmente avec la température ambiante. Cette augmentation est due au fait que si l'on considère une machine de Carnot entre l'air ambiant et l'air servant à l'échange avec le fluide caloporteur à l'évaporateur, le travail fourni par cette machine de Carnot sera d'autant plus important que la température ambiante est grande.

Le tableau ci-dessous donne le rendement exergetique de la machine pour les deux températures ambiantes.

$T_a = 18^\circ\text{C}$	$T_a = 25^\circ\text{C}$
14%	2%

Ce tableau montre que le rendement exergetique de la machine baisse fortement lorsque la température ambiante augmente (alors que son rendement énergétique reste inchangé) : plus la température ambiante augmente, moins le travail pouvant être obtenu à partir de la chaleur fournie au condenseur est faible.

Il faut noter que la très faible valeur du rendement exergetique provient du fait que la température ambiante est très proche de la température d'échange au condenseur, ce qui implique que le coefficient de performance de la machine de Carnot correspondante est très élevé. La forte baisse du rendement exergetique provient donc de la forte augmentation du coefficient de performance maximum.

Annexe : quelques données thermodynamiques du R142b

Données à saturation

T (°C)	P^{sat} (bar)	h_l^{sat} (kJ/kg)	h_v^{sat} (kJ/kg)	s_l^{sat} (kJ/(kg.K))	s_v^{sat} (kJ/(kg.K))	\mathcal{L} (kJ/kg)
-10	1.5	187.19	409.76	0.952	1.798	222.6
18	3.13	213.52	425.48	1.062	1.790	212.0
40	5.2	252.14	441.27	1.177	1.781	189.1

Autres données

P (bar)	T (°C)	h (kJ/kg)	s (kJ/(kg.K))
1.5	-25	168.64	0.875
1.5	-20	174.83	0.901
1.5	-15	181.01	0.926
1.5	-10	187.19	0.952
1.5	-10	409.76	1.798
1.5	-5	414.26	1.812
1.5	0	417.80	1.820
1.5	5	423.26	1.840
3.13	5	197.00	0.994
3.13	10	203.36	1.020
3.13	15	209.71	1.046
3.13	18	213.52	1.062
3.13	18	425.48	1.790
3.13	20	427.33	1.796
3.13	25	431.95	1.810
3.13	30	436.58	1.824
5.2	25	232.43	1.096
5.2	30	239.00	1.123
5.2	35	245.57	1.150
5.2	40	252.14	1.177
5.2	40	441.27	1.781
5.2	45	446.05	1.796
5.2	50	450.84	1.811
5.2	55	455.62	1.825
5.2	60	460.40	1.840

PC N°5

Etude d'un réacteur nucléaire à caloporteur gaz à haute température

Corrigé

Dans ce problème, on étudie les principales caractéristiques énergétiques d'un concept de réacteur nucléaire à caloporteur gaz à cycle direct à haute température (HTR). Le circuit primaire d'un tel réacteur est constitué d'un coeur nucléaire, d'une turbine, d'un échangeur et d'un compresseur (voir Fig. 1). On convient de numérotter les différents états du fluide caloporteur comme indiqué sur la Fig. 1.

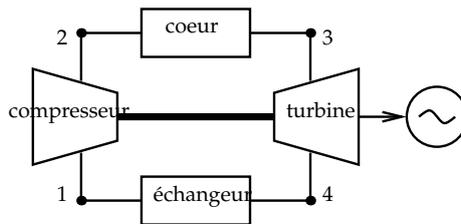


FIGURE 1 – Représentation schématique d'un HTR.

L'énergie libérée par la réaction de fission nucléaire dans le coeur du réacteur est cédée au fluide caloporteur. A l'échangeur, le fluide caloporteur du circuit primaire cède une partie de son énergie au fluide d'un circuit secondaire non représenté ici. Dans ce concept de réacteur, la puissance électrique est générée grâce au travail récupéré à la turbine du circuit primaire, raison pour laquelle on parle de cycle direct.

On supposera que les échanges de chaleur se font à pression constante, que les compression et détente sont adiabatiques et que l'écoulement du fluide dans le circuit est stationnaire. On supposera en outre que les canalisations sont adiabatiques et on négligera les pertes de pression dans les canalisations. On supposera enfin que les variations d'énergies cinétique et potentielle sont négligeables par rapport aux autres contributions.

Le fluide caloporteur du circuit primaire est de l'hélium dont le comportement thermodynamique peut être approché avec une bonne précision par une loi d'état de gaz parfait. Ses capacités calorifiques massiques à pression constante et à volume constant sont considérées constantes. Les données relatives au cycle et au fluide sont données au Tab. 1.

Description	Variable	Valeur
Température maximale du fluide caloporteur		850°C
Température minimale du fluide caloporteur		30°C
Pression de sortie du compresseur		72 bar
Taux de détente de la turbine	r_p	2.7
Puissance thermique du coeur	Q_c	600 MW
Capacité calorifique massique à pression constante	c_p	5.2 kJ/(kg.K)
Rapport des capacités calorifiques	γ	1.67
Rendement isentropique de compression	η_C	0.87
Rendement isentropique de détente	η_T	0.93

TABLE 1 – Données de dimensionnement d'un réacteur HTR.

Dans le problème, on note $z = r_p^{(\gamma-1)/\gamma}$.

1 Description générale du cycle

De quel cycle idéal ce cycle s'approche-t-il ?

Décrire le cycle étudié ici en déterminant en particulier le sens de circulation du fluide caloporteur et représenter ce cycle dans un diagramme de Mollier en justifiant.

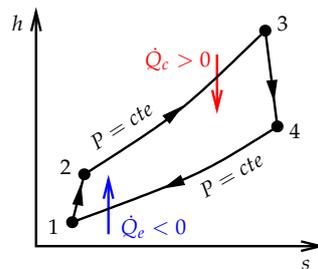
Préciser enfin en quels points le fluide caloporteur atteint ses températures minimale et maximale et la valeur de la pression aux différents points du circuit.

Correction

Ce cycle à gaz s'apparente au cycle idéal de Brayton composé de deux isentropiques (compression et détente) et de deux isobares (coeur et échangeur).

L'objectif de ce cycle thermodynamique est de fournir de la puissance mécanique à la turbine. Une partie de la chaleur fournie par la source chaude, ici le coeur du réacteur nucléaire, est transformée sous forme de travail, ici le travail récupéré à la turbine pour alimenter un alternateur, l'énergie complémentaire étant cédée à la source froide, ici l'échangeur. Le sens de circulation du fluide est donc le sens 1-2-3-4 de la Fig. 1. Si le fluide circulait en sens inverse, de la chaleur serait fournie à la source chaude et serait soutirée à la source froide et on devrait donc *fournir* du travail au fluide.

Le cycle est représenté sur le diagramme de Mollier ci-dessous.



Les échanges de chaleur étant supposés avoir lieu à pression constante et l'hélium étant supposé avoir un comportement de gaz parfait, les courbes 2-3 et 3-4 sont des portions d'exponentielles. Si les compression et détente étaient réversibles, les échanges de chaleur étant nuls au compresseur et à la turbine, elles seraient isentropiques et les courbes 1-2 et 3-4 seraient des segments de droite verticaux. Or, les rendements isentropiques du compresseur et de la turbine étant inférieurs à 1, les compression et détente ne sont pas réversibles. Etant adiabatiques, l'entropie du fluide augmente à la traversée du compresseur ainsi qu'à la traversée de la turbine. On a donc $s_2 > s_1$ et $s_4 > s_3$, ce qui justifie l'allure du cycle sur la figure ci-dessus.

L'enthalpie d'un gaz parfait n'étant fonction que de la température et étant en outre une fonction croissante de la température, la figure ci-dessus montre que la température la plus basse est atteinte au point 1, c'est-à-dire à la sortie de l'échangeur, et que la température la plus élevée est atteinte au point 3, c'est-à-dire à la sortie du coeur.

On a donc

$$T_1 = 303,15 \text{ K}$$

$$T_3 = 1123,15 \text{ K}$$

Il est précisé dans l'énoncé que la pression en sortie de compresseur est de 72 bar ; on a donc

$$P_2 = 72 \text{ bar}$$

L'échange thermique dans le coeur étant supposé être à pression constante, on a

$$P_3 = P_2 = 72 \text{ bar}$$

Le taux de détente à la turbine est r_p et on a donc

$$P_4 = \frac{P_3}{r_p}$$

soit

$$P_4 = \frac{72}{2.7} = 26.67 \text{ bar}$$

Enfin, l'échangeur étant supposé être isobare, on a

$$P_1 = P_4 = 26.67 \text{ bar}$$

2 Etats du fluide au cours du cycle

2.1 Bilan d'énergie à la traversée du coeur nucléaire

Montrer que la puissance de coeur, \dot{Q}_c , le débit-masse du fluide caloporteur, \dot{m} , et les températures d'entrée et de sortie du coeur sont liées par une relation que l'on explicitera. *Le système étudié sera identifié et toutes les hypothèses utilisées pour aboutir au résultat seront explicitées.*

Correction

Le système considéré est le fluide caloporteur situé entre l'entrée et la sortie du coeur ; ce système est donc ouvert. Le bilan d'énergie de ce système s'écrit :

$$\frac{d(\mathcal{U} + \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c)}{dt} = - \sum_{s-e} \dot{m} (h + e_p + e_c) + \dot{W}' + \dot{Q}$$

où \mathcal{U} , \mathcal{E}_p et \mathcal{E}_c sont les énergies respectivement interne, potentielle et cinétique du système fluide considéré, \dot{m} est le flux de masse aux frontières du domaine, h , e_p et e_c sont l'enthalpie massique et les énergies potentielle et cinétique massiques du fluide au frontière du système fluide, \dot{W}' est la puissance mécanique fournie au système et \dot{Q} est la puissance calorifique fournie au système.

L'écoulement étant stationnaire, le membre de gauche de cette équation est nul et le débit de masse sortant est égal au débit de masse entrant. Le système ne possède que 2 frontières ouvertes, 2 et 3, l'entrée étant en 2 et la sortie en 3. Par ailleurs, on peut négliger les variations d'énergie potentielle et d'énergie cinétique entre l'entrée et la sortie du coeur. Enfin, aucune puissance n'est fournie au fluide sous forme mécanique à la traversée du coeur. L'équation générale de bilan d'énergie se simplifie alors en

$$\dot{m} (h_3 - h_2) = \dot{Q}_c$$

L'hélium étant supposé avoir un comportement de gaz parfait, son enthalpie massique h ne dépend que de la température T et on a

$$\frac{dh}{dT} = cp$$

La capacité calorifique massique cp étant supposée être constante, on a

$$h_3 - h_2 = cp (T_3 - T_2)$$

On a finalement

$$\boxed{\dot{m} cp (T_3 - T_2) = \dot{Q}_c} \quad (1)$$

2.2 Température de sortie du compresseur

Déterminer l'expression de la température de sortie du compresseur en fonction de T_1 , z et η_C . *Les hypothèses pour aboutir au résultat seront explicitées.*

Correction

On commence par déterminer la température de sortie du compresseur T_{2is} correspondant à une compression isentropique.

L'hélium étant supposé avoir un comportement de gaz parfait et γ étant supposé être constant (cp et cv sont supposés constants), la relation suivante s'applique :

$$\frac{T_{2is}}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Or, si l'on se réfère par exemple au diagramme de Mollier, le taux de compression (P_2/P_1) est égal au taux de détente (P_3/P_4), si bien que la relation précédente peut s'écrire :

$$\frac{T_{2is}}{T_1} = \left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = r_p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = z \quad (2)$$

L'écoulement étant stationnaire, les variations d'énergie et potentielles étant négligées, la puissance calorifique étant nulle et l'hélium ayant un comportement de gaz parfait, l'application du bilan d'énergie au fluide compris entre l'entrée et la sortie du compresseur donne :

$$\dot{W}'_{Cis} = \dot{m} cp (T_{2is} - T_1) \quad (3)$$

La puissance de compression réelle \dot{W}'_C est supérieure à la puissance isentropique \dot{W}'_{Cis} , le rapport entre les deux étant donné par le rendement isentropique de compression η_C :

$$\frac{\dot{W}'_{Cis}}{\dot{W}'_C} = \eta_C \quad (4)$$

L'application du premier principe à la transformation réelle donne (toutes les hypothèses nécessaires pour arriver à cette relation étant vérifiées) :

$$\dot{W}'_C = \dot{m} cp (T_2 - T_1) \quad (5)$$

En combinant les relations (3), (4) et (5), on montre immédiatement :

$$\frac{T_{2is} - T_1}{T_2 - T_1} = \eta_C$$

En utilisant la relation (2), on montre facilement la relation suivante :

$$T_2 = T_1 \left(1 + \frac{z-1}{\eta_C}\right) \quad (6)$$

2.3 Température de sortie de la turbine

Déterminer la température du fluide à la sortie de la turbine en fonction de T_3 , z et η_T .

Correction

Le raisonnement suivi pour la turbine est identique à celui suivi pour le compresseur. On a donc :

$$\dot{W}'_T = \dot{m} cp (T_3 - T_4) \quad (7)$$

$$\dot{W}'_{Tis} = \dot{m} cp (T_3 - T_{4is})$$

Or

$$\frac{T_{4is}}{T_3} = \left(\frac{P_4}{P_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1}{z}$$

si bien que

$$\dot{W}'_{Tis} = \dot{m} cp T_3 \left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

Par définition du rendement η_T de la turbine, on a :

$$\frac{\dot{W}'_T}{\dot{W}'_{Tis}} = \eta_T$$

Par conséquent

$$\frac{T_3 - T_4}{T_3 \left(1 - \frac{1}{z}\right)} = \eta_T$$

Soit :

$$T_4 = T_3 \left(1 - \eta_T \left(1 - \frac{1}{z}\right)\right) \quad (8)$$

2.4 Application numérique

Donner les états du fluide ($P; T$) aux différents points du circuit sous la forme d'un tableau récapitulatif.

Correction

On a :

$$z = (2.7)^{\frac{1.67-1}{1.67}} = 1.49$$

$$P_1 = P_4 = \frac{72}{2.7} = 26.67 \text{ bar}$$

D'après les relations (6) et (8), on a :

$$T_2 = (273.15 + 30) \times \left(1 + \frac{1.49 - 1}{0.87}\right) = 473.9 \text{ K} = 200.75 \text{ °C} \quad (9)$$

$$T_4 = (273.15 + 850) \times \left(1 - 0.93 \times \left(1 - \frac{1}{1.49}\right)\right) = 779.65 \text{ K} = 506.5 \text{ °C} \quad (10)$$

	P (bar)	T (K)	T (°C)
1	26.67	303.15	30
2	72	473.9	200.75
3	72	1123.15	850
4	26.67	779.65	506.5

3 Puissances échangées aux différents composants du circuit et rendement énergétique

Déterminer le débit de masse d'hélium à travers le circuit et en déduire les puissances fournies au fluide aux différents composant du circuit.

En déduire le rendement énergétique du cycle et discuter sa valeur.

Correction

Débit de masse

La relation (1) permet de déterminer la valeur du débit de masse d'hélium dans le circuit :

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}_c}{c_p (T_3 - T_2)} = \frac{600 \times 10^6}{5.2 \times 10^3 \times (1123.15 - 473.9)} = 177.7 \text{ kg/s} \quad (11)$$

Puissances mécaniques au compresseur et à la turbine

La puissance mécanique fournie au fluide par le compresseur est donnée par la relation (5) ; on en déduit :

$$\dot{W}'_C = 177.7 \times 5.2 \times 10^3 \times (473.9 - 303.15) = 157.8 \text{ MW} \quad (12)$$

Cette puissance est bien positive : le compresseur fournit de l'énergie au fluide.

La puissance mécanique fournie au fluide par la turbine est donnée par la relations (7) ; on en déduit :

$$\dot{W}'_T = 177.7 \times 5.2 \times 10^3 \times (779.65 - 1123.15) = -317.4 \text{ MW} \quad (13)$$

Cette puissance est négative car le fluide cède son énergie thermique sous forme d'énergie mécanique à la turbine, si bien que la puissance fournie par la turbine au fluide est négative.

Puissance calorifique à l'échangeur

Avec l'ensemble des hypothèses du problème, l'application du bilan d'énergie au fluide compris entre l'entrée et la sortie de l'échangeur donne :

$$\dot{Q}_e = \dot{m} c_p (T_1 - T_4) = 177.7 \times 5.2 \times 10^3 \times (303.15 - 779.65) = -440.3 \text{ MW} \quad (14)$$

Cette puissance est bien négative car le fluide caloporteur cède son énergie au fluide du circuit secondaire.

Récapitulatif

	\dot{W}' (MW)	\dot{Q} (MW)
Compresseur	157.8	0
Coeur	0	600
Turbine	-317.4	0
Echangeur	0	-440.3

On vérifie que la somme des énergies fournies au fluide sur le cycle est nulle (à moins de 0.1% près).

Rendement énergétique

Une partie de la puissance mécanique fournie à la turbine par le fluide (soit $-\dot{W}'_T$) est fournie au compresseur (\dot{W}'_C), le complément étant effectivement utilisé à l'alternateur pour fournir de l'énergie électrique. La puissance mécanique utile est donc $-(\dot{W}'_T + \dot{W}'_C)$. L'énergie fournie est celle fournie par le coeur nucléaire, soit \dot{Q}_c . On a donc :

$$\eta = \frac{-(\dot{W}'_T + \dot{W}'_C)}{\dot{Q}_c} = \frac{317.4 - 157.8}{600} = 26.6\% \quad (15)$$

Ce rendement peut être comparé, d'une part, au rendement de Carnot et, d'autre part, au rendement du cycle de Brayton. On a :

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{303.15}{1123.15} = 73\%$$
$$\eta_{Brayton} = 1 - \frac{1}{r_p^{(\gamma-1)/\gamma}} = 1 - \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{1.49} = 32.9\%$$

Ces résultats montrent tout d'abord que le rendement du cycle de Brayton est inférieur au rendement du cycle de Carnot, ce qui est en accord avec le théorème de Carnot. Par ailleurs, le cycle réel étudié a un rendement énergétique inférieur au rendement du cycle de Brayton. Cela est dû aux irréversibilités au compresseur et à la turbine.

4 Rendement exergetique du cycle

On suppose que la température moyenne d'échange dans le coeur et à l'échangeur sont respectivement 845°C et 25°C. On suppose par ailleurs que les conditions ambiantes sont $P_a = 1$ bar et $T_a = 10^\circ\text{C}$.

Définir et déterminer le rendement exergetique du cycle η_{ex} .

Donner une interprétation de ce rendement exergetique.

Correction

Rendement exergetique

L'exergie récupérée est celle liée à la puissance mécanique récupérée qui est de l'exergie pure. L'exergie consommée est celle liée à l'échange de chaleur dans le coeur qui est donnée par $\dot{Q}_c (1 - T_a/T_c)$ où T_c est la température d'échange moyenne dans le coeur. Le rendement exergetique du cycle η_{ex} est alors défini par

$$\eta_{ex} = \frac{|\dot{W}'_T + \dot{W}'_C|}{|\dot{Q}_c (1 - T_a/T_c)|} \quad (16)$$

On trouve :

$$\eta_{ex} = \frac{317.4 - 157.8}{600 \times (1 - 283.15/1118.15)} = 35.6\%$$

Interprétation

Considérons une machine de Carnot fonctionnant entre une source chaude à la température T_c et une source froide à la température T_a et pour laquelle la puissance sous forme de chaleur provenant de la source chaude est \dot{Q}_c . La puissance mécanique récupérée est alors

$$\dot{W}'_{max} = \dot{Q}_c \left(1 - \frac{T_a}{T_c}\right)$$

Par conséquent, le rendement exergetique (26) peut également s'écrire

$$\eta_{ex} = \frac{|\dot{W}'|}{\dot{W}'_{max}}$$

Le rendement exergetique représente donc le rapport entre la puissance mécanique effectivement récupérée et la puissance mécanique maximale pouvant être récupérée.

5 Etude du cycle avec régénérateur

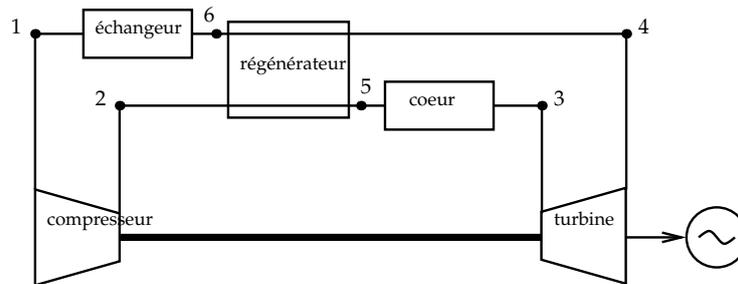


FIGURE 2 – Représentation schématique d'un HTR avec régénérateur.

On considère le nouveau circuit représenté sur la Fig. 2 qui diffère du circuit précédent par la présence d'un récupérateur de chaleur ou régénérateur qui est un échangeur de chaleur que l'on suppose adiabatique. On suppose que les états 1 et 3 sont les mêmes que ceux du cycle sans régénération et que les caractéristiques du compresseur et de la turbine sont également inchangées : rapports de compression et de détente et rendements isentropiques inchangés (cf. Tab. 1). De même, la puissance calorifique dégagée par le cœur nucléaire est inchangée.

5.1 Régénération

Expliquer l'intérêt énergétique de la régénération.

Représenter le cycle du fluide caloporteur dans un diagramme de Mollier en indiquant la chaleur de régénération maximale.

Pourquoi peut-on définir l'efficacité du régénérateur par

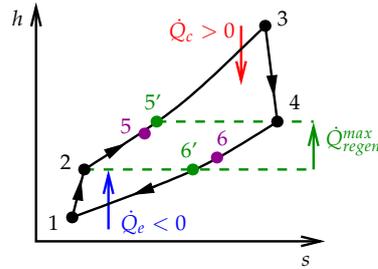
$$\epsilon_R = \frac{h_4 - h_6}{h_4 - h_2} = \frac{h_5 - h_2}{h_4 - h_2}$$

Indiquer en particulier les états 5 et 6 sur le cycle représenté sur le diagramme de Mollier.

Correction

Dans un cycle sans régénération, une part significative de l'énergie fournie par le cœur est cédée à l'échangeur (plus des deux tiers dans le cas du cycle étudié). L'idée de la régénération est d'utiliser une partie de cette énergie pour préchauffer le fluide caloporteur avant son entrée dans le cœur. Cette énergie, perdue dans le cas du cycle sans régénération est ici utilisée pour chauffer le fluide à la sortie du compresseur, chauffage nécessaire pour augmenter l'énergie thermique du fluide récupérée à la turbine.

La figure ci-dessous représente le cycle du fluide caloporteur dans un diagramme de Mollier. Le fluide à la sortie du compresseur 2 est chauffé à haute pression dans le régénérateur, la chaleur fournie provenant du fluide à basse pression sortant de la turbine. On suppose dans un premier temps que l'échangeur utilisé pour la régénération est parfait, c'est-à-dire qu'il permet d'échanger de la chaleur entre le fluide chaud et le fluide froid sans écart de température entre ces deux fluides. Cela signifie que la température du fluide froid (provenant du compresseur) à la sortie du régénérateur, et donc son enthalpie (qui ne dépend que de T), est égale à celle du fluide chaud (provenant de la turbine) à l'entrée du régénérateur ; on a donc $h_{5'} = h_4$ (cf. figure ci-dessous). De même, on a $h_{6'} = h_2$. Par conséquent, la chaleur maximale transmise du fluide chaud au fluide froid est $q_{regen}^{max} = (h_4 - h_2)$.



Or, pour des échangeurs thermiques réels, la différence de température entre le fluide chaud et le fluide froid est strictement positive. On a donc $T_4 > T_5$ et $T_6 > T_2$. Cela signifie donc que $(h_5 - h_2) < (h_4 - h_2)$ et que $(h_4 - h_6) < (h_4 - h_2)$ (cf. figure ci-dessus).

Par ailleurs, le bilan d'énergie appliqué au fluide compris dans le régénérateur implique :

$$\dot{m} h_2 + \dot{m} h_4 = \dot{m} h_5 + \dot{m} h_6$$

soit

$$h_4 - h_6 = h_5 - h_2$$

On a donc

$$\frac{h_4 - h_6}{h_4 - h_2} = \frac{h_5 - h_2}{h_4 - h_2} < 1$$

5.2 Etats du fluide au cours du cycle

On suppose que l'efficacité du régénérateur est $\epsilon_R = 0.95$.

Déterminer les états du fluide aux différents points caractéristiques du circuit (on pourra utiliser une partie des résultats obtenus précédemment).

Correction

D'après la définition du rendement du régénérateur et en utilisant le fait que l'hélium est supposé avoir un comportement de gaz parfait à c_p constant, on a :

$$\epsilon_R = \frac{h_5 - h_2}{h_4 - h_2} = \frac{T_5 - T_2}{T_4 - T_2}$$

On en déduit immédiatement :

$$T_5 = T_2 + \epsilon_R (T_4 - T_2) \quad (17)$$

Les expressions des températures T_2 et T_4 sont toujours données par les relations (6) et (8). Les caractéristiques de compression et de détente étant inchangées et les températures T_1 et T_3 n'étant pas modifiées, les températures T_2 et T_4 sont celles déterminées lors de l'étude du premier cycle.

On a donc :

$$T_5 = 473.9 + 0.95 \times (779.65 - 473.9) = 764.36 \text{ K} \quad (18)$$

L'application du bilan d'énergie au régénérateur donne :

$$h_4 - h_6 = h_5 - h_2$$

soit

$$T_6 = T_4 - T_5 + T_2 \quad (19)$$

On a donc :

$$T_6 = 779.65 - 764.36 + 473.9 = 489.19 \text{ K}$$

	P (bar)	T (K)	T (°C)
1	26.67	303.15	30
2	72	473.9	200.75
5	72	764.36	491.21
3	72	1123.15	850
4	26.67	779.65	506.5
6	26.67	489.19	216.04

On vérifie bien que T_6 est légèrement supérieure à T_2 et que T_4 est légèrement supérieure à T_5 .

5.3 Caractéristiques du cycle

Déterminer le débit de masse d'hélium, les puissances échangées aux différents composants du circuit. Commenter les valeurs obtenues, notamment en les comparant à celles du cycle sans régénération. En déduire les rendements énergétique et exergetique du cycle.

Correction

Les bilans d'énergie appliqués au fluide caloporteur à la traversée du coeur, du compresseur et de la turbine donnent respectivement :

$$\dot{Q}_c = \dot{m}_r c_p (T_3 - T_5)$$

soit

$$\dot{m}_r = \frac{\dot{Q}_c}{c_p (T_3 - T_5)} \quad (20)$$

$$\dot{W}'_{Cr} = \dot{m}_r c_p (T_2 - T_1) \quad (21)$$

$$\dot{W}'_{Tr} = \dot{m}_r c_p (T_4 - T_3) \quad (22)$$

On en déduit :

$$\dot{m}_r = \frac{600 \cdot 10^6}{5.2 \cdot 10^3 \times (1123.15 - 764.36)} = 321.6 \text{ kg/s}$$

$$\dot{W}'_{Cr} = 321.6 \times 5.2 \cdot 10^3 \times (473.9 - 303.15) = 285.5 \text{ MW}$$

$$\dot{W}'_{Tr} = 321.6 \times 5.2 \cdot 10^3 \times (779.65 - 1123.15) = -574.4 \text{ MW}$$

La puissance nette fournie à l'alternateur est donc

$$\dot{W}'_r = -(\dot{W}'_{Tr} + \dot{W}'_{Cr}) = 289 \text{ MW}$$

La puissance fournie sous forme de chaleur à l'échangeur est :

$$\dot{Q}_{er} = \dot{m}_r c_p (T_1 - T_6) \quad (23)$$

soit

$$\dot{Q}_{er} = 321.6 \times 5.2 \cdot 10^3 \times (303.15 - 489.19) = -311.1 \text{ MW}$$

Enfin, la puissance échangée entre le fluide chaud et le fluide froid au régénérateur est

$$\dot{Q}_{regen} = \dot{m}_r c_p (T_5 - T_2) \quad (24)$$

soit

$$\dot{Q}_{regen} = 321.6 \times 5.2 \cdot 10^3 (764.36 - 473.9) = 485.7 \text{ MW}$$

Récapitulatif

	\dot{W}' (MW)	\dot{Q} (MW)
Compresseur	285.5	0
Régénérateur	0	485.7
Coeur	0	600
Turbine	-574.4	0
Régénérateur	0	-485.7
Echangeur	0	-311.1

On vérifie que la somme des puissances échangées est bien nulle sur le cycle.

Commentaires

Ces valeurs montrent que les puissances mécaniques au compresseur et à la turbine sont plus importantes (en valeur absolue) que celles obtenues dans le cas du cycle sans régénération et que la puissance nette fournie à l'alternateur est également plus grande : environ 290 MW contre environ 160 MW dans le cas du cycle sans régénération, ce qui représente un gain de 80% en puissance mécanique récupérée pour une même puissance calorifique fournie.

Par ailleurs, la puissance calorifique cédée à l'échangeur (et qui est donc « perdue ») est d'environ 310 MW contre environ 440 MW dans le cas du cycle sans régénération. Ceci constitue donc une économie d'énergie substantielle.

Rendement énergétique

Le rendement énergétique du cycle est donné par

$$\eta = \frac{\dot{W}'_r}{\dot{Q}_c} = \frac{289}{600} = 48.2\% \quad (25)$$

On peut remarquer que ce rendement peut être calculé beaucoup plus directement. En effet, la puissance délivrée au fluide par le cœur n'est pas modifiée par la régénération et les états en entrée et sortie du compresseur et de la turbine ne sont pas modifiés non plus ; on a donc $\dot{W}'_r = \dot{W}' (\dot{m}_r / \dot{m})$. Par conséquent

$$\eta_r = \eta \frac{\dot{m}_r}{\dot{m}}$$

Ce rendement est nettement supérieur à celui du cycle sans régénération (26.6%), mais reste encore bien inférieur au rendement de Carnot (73%).

Rendement exergetique

$$\eta_{ex} = \frac{|\dot{W}'_T + \dot{W}'_C|}{|\dot{Q}_c (1 - T_a/T_c)|} = \frac{289}{600 \times (1 - 283.15/1118.15)} = 65.5\% \quad (26)$$

Ce rendement exergetique est nettement augmenté par rapport au cycle sans régénération. On note par ailleurs que cette valeur est très proche du rapport η / η_{Carnot} , ce qui est cohérent.